

Експоненцијалне функције, једначине и неједначине

1. У истом координатном систему нацртати графике следећих функција:

- а) $y = 2^x$, $y = 2^{x-3}$, $y = 2^{x+2}$;
 б) $y = 3^{-x}$, $y = 3^{-x} + 2$, $y = 3^{-x} - 1$.

2. Нацртати график и испитати функцију:

- а) $y = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y = -1 - 2^{-x}$;
 б) $y = 2^{-|x|}$, $y = 2 \cdot 2^{-|x+2|} - 1$, $y = 3 - 2^{-|x-3|+2}$;
 в) $y = |2^{|x|} - 4| - 2$, $y = |2^{-|x+2|+2} - 3| - 1$;
 г) $y = 2^{\frac{x}{|x|}}$; $y = \frac{|x|}{x} \cdot 2^{\frac{x^2}{|x|}}$

3. Решити једначине:

- а) $2^x \cdot 0,5^{\frac{3}{x}} = 4$; $2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16 = 0$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} \cdot 5^{-\frac{4}{x}} = 25$;
 б) $9^{-1,5} \cdot \sqrt{27^{2x-1}} = 3^{2x-1}$; $(\sqrt{2})^{x^2-|x|} \cdot (0,5)^{|x|+1} = 0,25$;
 в) $(0,4)^{|2x^2-3|} = 2,5^x$; $\left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}} - \sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x}{3}}} = \sqrt[4]{37}$;
 г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{16}{9}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{\left|\frac{2x}{x-1}\right|} = 0,64$;
 д) $\left(\frac{25}{9}\right)^x \cdot (0,6)^{x^2+x} = 0,36$; $(0,2)^{1-2x} \cdot \sqrt{125^{1-x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{x}{2}}$.

4. Решити једначине:

- а) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$; $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$;
 б) $27^{1-x} + 3 \cdot 9^{-1,5x} = 10$; $36^x = 3^{x+2} \cdot 2^x - 18$;
 в) $7^{x-1} + 7^x = 8^x$; $4^{x-1} - 9^{x-1} = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$;
 г) $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$; $7^{2x} - 7^{x-2} = 1$;
 д) $2^x + 2^{1-x} = 3$; $4^{x-1} - 2^{x-1} = 12$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 2$;
 њ) $12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{\frac{1}{x}} = 27$; $9 \cdot 2^{x+1} + 4 \cdot 3^{x+1} = 35 \cdot \sqrt{6^x}$;
 е) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 10$;
 ж) $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$; $3^x - 26 = 3^{\frac{x-3}{2}}$;
 з) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

5. Решити једначине:

- а) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$;
 б) $|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}$;
 в) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$;
 г) $(x+4) \cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1) \cdot |3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

6. Решити једначине:

- а) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$
б) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$;
в) $4^{1-x} - 4^{1+x} + 16^x + 16^{-x} = 7$
г) $(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 34$

7. Решити неједначине:

- а) $(2, 5)^{1-3x} < 0, 4^{x-2}$; $3^{\frac{1}{x}} + 3^{3+\frac{1}{x}} > 84$;
б) $8 \cdot 0, 5^{x(x+1)} > 0, 25^{\frac{3}{2}x}$; $6^{2x-3} < 2^{x-7} \cdot 3^{3x+1}$
в) $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 > 0$; $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$;
г) $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$; $(1-2x+4x^2)^{x^2-x} > 1$;
д) $\frac{1}{2^{2x+3}} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot (0, 75)^{\frac{1}{x-2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
ђ) $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x+1}} \geq 9^{\sqrt{x}}$

8. Решити неједначине:

- а) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$; $\frac{8^x - 4^x - 2^{x+1}}{\sqrt{9-x^2}} \leq 0$
б) $\frac{9^x - 3^{x+1} + 2}{\sqrt{2-x}} \geq 0$; $\frac{3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1}{3x - 9x} \leq 0$
в) $\frac{2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1}{2^{1-x} - 1} > 0$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-1|} + \left(\frac{1}{5}\right)^{|x+1|} \leq 26$
г) $2^x + 3^x + 4^x + 5^x > 54$; $1 < 3^{|x^2-x|} \leq 9$;

9. Решити једначине:

- а) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$; $2 \cdot 8^x - 12^x = 27^x$;
б) $6 \cdot 5^{2x+1} - 5 \cdot 150^x + 6^x = 6$; $3^x + 21 \cdot 7^{2x} = 3 + 7 \cdot 147^x$;
 $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \cdot \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$;
в) $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})}$.

10. Решити једначине:

- а) $3^x + 4^x = 5^x$; б) $7^x + 24^x = 25^x$;
в) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 2^x$;
г) $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$;
д) $6^x - 2^x = 32$; ђ) $9 \cdot 7^x + 1 = 2^{\frac{6}{x}}$.

11. Одредити збир свих решења једначине

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (2^{2x} + 2^x - 6)^3$$

12. Решити једначину $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$.

13. Решити једначине у зависности од реалног броја a :

- а) $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$;
б) $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Задаци из Тангенте

1. Дата је једначина $8^x - m \cdot 2^{x+1} + 4m = 8$, m је реалан параметар.
 - а) Решити једначину у случају $m = 6$.
 - б) Одредити све вредности параметра m за које једначина има тачно једно реално решење.
2. Нека је $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Израчунати збир $f(\frac{1}{2005}) + f(\frac{2}{2005}) + f(\frac{3}{2005}) + \dots + f(\frac{2004}{2005})$.
3. Решити једначине:
 - а) $4\sqrt{x-2} - 12 = 2\sqrt{x-2}$;
 - б) $25\sqrt{x^2-1} - 124 \cdot 5\sqrt{x^2-1} = 125$;
 - в) $27\sqrt{x} - 10\sqrt{9x+1} = 0$;
 - г) $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$
 - д) $x^2 \cdot 4\sqrt{2-x} + 4^{2-x} = 4\sqrt{2-x+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$;
 - ђ) $8 \cdot 4^{-x+\frac{1}{x}} - 4^x + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}+1} - 1 = 0$
4. Решити неједначине:
 - а) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$;
 - б) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leq 5 \cdot 36^x$;
 - в) $4\sqrt{9-x^2+1} + 2 < 9 \cdot 2\sqrt{9-x^2}$;
 - г) $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leq 5^{x+3} - 3^{x+3}$
 - д) $4\sqrt{\frac{2x-1}{2x}} + \sqrt{14} \leq 14\sqrt{\frac{2x-2}{2x-1}}$;
 - ђ) $4^x \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4^{1+\sqrt{x}}$
5. Решити једначине:
 - а) $5^x - 3^{x+1} = 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.
 - б) $2 \cdot 12^x - 3^{x+1} + 4^{x+1} - 6 = 0$.
 - в) $5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x$.
 - г) $5 \cdot 2^{3x} + 3 \cdot 20^x - 12 \cdot 50^x + 4 \cdot 5^{3x} = 0$;
6. Решити неједначине:
 - а) $(2 - \sqrt{3})^{\frac{2-x}{x}} \leq (2 + \sqrt{3})^{-x}$.
 - б) $\frac{3^{x+1} + 5^{x-1}}{5^x - 3^x} \leq 2$.
 - в) $(5 - 2\sqrt{6})^{(x-2)^2} + (5 + 2\sqrt{6})^{(x-2)^2} \leq 10$.
 - г) $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geq 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$.
7. Наћи све вредности реалног параметра p тако да једначина $(p-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$ има бар једно решење.
8. Решити неједначину $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$.
9. Решити неједначину $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x \leq 62$.

Задаци са такмичења

- Доказати да број $5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^n \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^n \cdot 121^n$ није потпун квадрат ни за један природан број n .
- Решити неједначину:
 $4^{x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-4}} + 2^{2x-6+\sqrt{x^2-4}} \geq 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}} + 3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}$
- Решити једначину $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^3}$
- $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8} + \sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8} - \sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x = 2^{\frac{x+4}{4}}$
- $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x + \sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x-9}})^x = 2^{x+1}$
- Решити неједначину $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$
- Решити систем $2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 8 \wedge \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$
- Решити неједначину $2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \leq 0$
- Одредити све вредности реалног параметра a тако да једначина $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ има тачно једно решење.
- Дати су реални бројеви m и n , $mn < 0$, $m + n \neq 0$ и функције:
 $y = m \cdot 3^x + n$ и $y = n \cdot 3^{-x} + m$. Доказати да се графици ових двеју функција секу у двама тачкама, од којих је једна на апсцисној, а друга на ординатној оси.
- Одредити сва реална решења једначине $(2 + \sqrt{3})^x + 1 = (2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$
- У скупу \mathbb{R} решити $4\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14\sqrt{\frac{2^x-2}{2^x-1}}$
- Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина $(p-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + p + 2 = 0$ има бар једно решење.
- У скупу реалних бројева решити једначину $28 \cdot 3 \cdot 2009 = 28^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2009^{x^3}$.
- Решити у скупу реалних бројева
 $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geq 9^{\sqrt{x}}$
- Нека је $x \in \mathbb{R}^-$. Испитати шта је веће $4^x + 1$ или $2^x + 3^x$.
- У скупу \mathbb{R} решити неједначину $(5\sqrt{2} - 7)^x + 2 \leq 5 \cdot (\sqrt{2} - 1)^x$.

Задаци са пријемних испита

1. За које $a \in \mathbb{R}$ систем
 $2^{1+\sqrt{xy}} + 3^{x+y-1} = a$
 $8^{1+\sqrt{xy}} + 27^{x+y-1} = a^3 - 3a^2 + 3a$
има бар једно решење (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$?
2. Ако је $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ и $x \in \mathbf{R}$, тада x припада:
А) $(4, +\infty)$; Б) $(3, 4]$; В) $(2, 3]$; Г) $(1, 2]$; Д) $[-2, 2)$.
3. Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.
4. Решити једначину $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.
5. Решити једначину $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.
6. Решити једначину $9^x + 3^{x+1} + 2 = 0$.
7. Ако је (x, y) , $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, решење система једначина
 $4 \cdot 4^x = 8^y$, $2 \cdot 2^y = 2^x$, онда је производ $x \cdot y$ једнак:
А) 12; Б) 16; В) 25; Г) 21; Д) 20.
8. Решити систем једначина $3 \cdot 2^x - 3^y = 11$, $2^x + 4 \cdot 3^y = 8$.
9. Решити једначину $2^{2x+1} - 21 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 = 0$.
10. Решити једначину $2^{2x+2} + 5^{2x+2} - 29 \cdot 5^x \cdot 2^x = 0$.
11. Производ квадрата решења једначине $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ једнак је:
А) 0; Б) 2; В) 4; Г) $1/4$; Д) 5.
12. Сва решења једначине $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ припадају интервалу:
А) $(-1, 1)$; Б) $(1, 3)$; В) $(3, 5)$; Г) $(5, 7)$.
13. У скупу реалних бројева решити једначину $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 = 0$.
14. Решити једначину $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.
15. Скуп $x \in \mathbb{R}$ за које је тачна неједнакост $7^{1+x} + 7^{1-x} < 50$ је:
А) $(-\infty, +\infty)$; Б) $(-\infty, -1]$; В) $(-1, 1)$; Г) $[1, +\infty)$; Д) $(-2, 2)$.
16. Решење једначине $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$ је у интервалу:
А) $(0, 5)$; Б) $(5, 10)$; В) $(10, 15)$; Г) $(15, 20)$.
17. Збир квадрата решења једначине $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$ једнак је:
А) 5; Б) 10; В) 8; Г) 13; Д) 25.
18. Број решења једначине $4^x = 2^{x+1} + 8$ је:
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) већи од 3.
19. Скуп свих решења неједначине $4^{1-x^2} + 2^{2-x^2} > 3$ је:
А) $(-\infty, 1)$; Б) $(-1, 1)$; В) $(1, +\infty)$; Г) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; Д) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

20. Збир решења једначине $2^{2x+3} - 3 \cdot 10^x = 2^x \cdot 5^{x+2} - 20 \cdot 5^{2x}$ је:
 А) -1 ; Б) 0 ; В) $7/2$; Г) 1 ; Д) $3/2$.
21. Производ свих реалних решења једначине $(5 - 2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} + (5 + 2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} = 10$ је:
 А) -3 ; Б) 1 ; В) 3 ; Г) 4 ; Д) 6 .
22. Збир реалних решења једначине $0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$ је једнак:
 А) 1 ; Б) 4 ; В) 2 ; Г) 5 ; Д) -8 .
23. Збир решења једначине $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$ налази се у интервалу:
 А) $(0, 1]$; Б) $(1, 2]$; В) $(2, 3]$; Г) $(3, 4]$; Д) $(4, 5]$.
24. Решење једначине $2^{\frac{x+1}{2}} = 0,5^{\frac{1-4x}{7}}$ је у интервалу:
 А) $(-4, 0)$; Б) $(0, 4)$; В) $(4, 8)$; Г) $(8, 12)$.
25. Сва решења једначине $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$ припадају интервалу:
 А) $(-3, 0)$; Б) $(0, 4)$; В) $(1/2, 5/2)$; Г) $(2, 5)$.
26. Решити једначину $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$.
27. Наћи збир квадрата решења једначине $2^{x^2-2x-10} = \frac{1}{4}$.
28. Наћи збир квадрата решења једначине $3^{x^2-2x-10} = \frac{1}{9}$.
29. Збир свих реалних решења једначине $(3 + 2\sqrt{2})^{2(x^2-7x+10)} + 1 = 6(3 + 2\sqrt{2})^{x^2-7x+10}$ једнак је:
 А) 14 ; Б) 7 ; В) -7 ; Г) -14 ; Д) 10 .
30. Сва решења једначине $3^x \cdot 4^{x+1} = 576$ припадају интервалу:
 А) $(1, 2]$; Б) $(2, 3]$; В) $(3, 5]$; Г) $[4, 6)$; Д) $(7, 8]$.
31. Број реалних решења једначине $2^{-x} - 2^x = 5(1 + 2^{-x})$ једнак је:
 А) 0 ; Б) 1 ; В) 2 ; Г) 3 ; Д) 4 .
32. Збир свих решења једначине $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 2^x - 1} + \frac{2 \cdot 2^x - 1}{3 \cdot 2^x - 1} = \frac{5}{2}$ је:
 А) -2 ; Б) 2 ; В) 0 ; Г) $2,5$; Д) $0,5$.
33. Збир квадрата решења једначине $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$ је:
 А) $55/4$; Б) $19/3$; В) $35/2$; Г) 17 ; Д) $65/4$.
34. Збир квадрата свих решења једначине $4^x = 2^{(x+1)/x}$ је:
 А) 5 ; Б) $1/2$; В) $5/4$; Г) 25 .
35. Решити неједначину $(0,2)^{(2x-3)/(x-2)} > 5$.
36. Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}$.

37. Збир свих решења једначине $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ је:
А) 1; Б) 2; В) 0; Г) -1; Д) -2.
38. Број решења једначине $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$ је:
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) 4.
39. Ако је $2^{x+2} + 4^{x+4} = \frac{5}{4}$ и $x \in \mathbf{R}$, онда x^2 припада интервалу:
А) $(0, 1)$; Б) $[1, 2)$; В) $[2, 3)$; Г) $[3, 4)$; Д) $[4, +\infty)$.
40. Број решења једначине $5^{2x-1} - 5^x = 100$ је:
А) 4; Б) 3; В) 1; Г) 0; Д) 2.
41. Збир квадрата решења једначине $2^{x^2-2x-10} = 1/4$ је:
А) 10; Б) 16; В) 20; Г) 25.
42. Збир решења једначине $\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{1/5} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$ је:
А) 1; Б) $\sqrt{7}$; В) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$; Г) $-2/3$; Д) $2/3$.
43. Производ решења једначине $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ је:
А) 1; Б) $\log_2 3$; В) 0; Г) -1; Д) $3/2$.
44. Решити једначину $5^{x-1} - 5 \cdot (0.2)^{x-2} = 26$.