Неки интересантни задаци из експоненцијалних функција

Циљ овог предавања је да укаже на неке примере коришћења експоненцијалне функције који већем броју ученика нису превише познати. Такође ће бити поменути и неки интересантни задаци који могу помоћи ученицима да неке познате појмове повежу на другачији начин.

Задаци

1. Решити једначину $x^2 = 2^x$.
   Прва реакција је: Шта да радим са оваквом једначином? Како да одредим x када је и „горе" и „доле"? После првог шока неко ће можда рећи: решење је 2. Уз мало среће неко ће приметити да је решење и број 4. Тешко да ће се неко сетити да предложи цртање графика тих функција. То је, наравно, и због тога што се и ми ретко одлучујемо да задајемо задатке у којима ће захтев бити да се решење одреди графичком методом. На цртежу ћемо лако уочити треће решење, кога се нико није сетио, али је могуће и да ће многи ученици нацртати графике функција тако да и поменута два решења неће бити „видљива". Овај пример може уверити сваког ученика да прецизно цртање графика функције и добар цртеж могу бити квалитетан путоказ ка решењу задатка. За домаћи можемо тражити да ученици уз помоћ рачунара нацртају решење овог задатка.

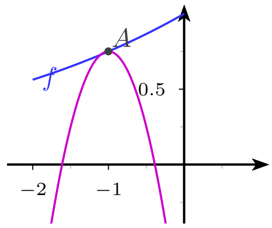
2. $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$
   Сменом $2^x = t$ једначина постаје квадратна по t, тј. $t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0$
   Како је $D = (x-5)^2$, то је $t_1 = -2$ и $t_2 = 3 - x$, па се почетна једначина своди на следеће две: $2^x = -2$ или $2^x = 3 - x$ (требало би инсистирати да ученици нацртају оба цртежа).
   Коначно решење је $x = 1$.

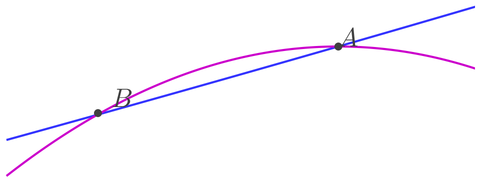
   У следећем примеру ћемо показати да и уз помоћ рачунара понекад није тако једноставно решити задатак.

3. Решити једначину $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = -2x^2 - 4x - \dfrac{5}{4}$.
   Уколико неко и покуша да реши задатак, размишљање у стилу: нема решења, јер је лева страна увек позитивна, а на десној страни су све сами минуси тј. десна страна је увек негативна (знак квадратног тринома се тешко одомаћује у глави просечног средњошколца). После

трансформације десне стране у облик $-2(x+1)^2+\frac{3}{4}$, могуће је да ће неко приметити да је једно решење -1. Да ли је и једино? И на добро нацртаном цртежу руком, тешко да ће неко моћи да уочи тачан одговор.

Стога потражимо решења уз помоћ рачунара. Ако у *Geogebri* нацртамо графике ових функција, на цртежу уобичајене величине видећемо само једну тачку пресека. Ако увећамо слику видећемо да постоје две

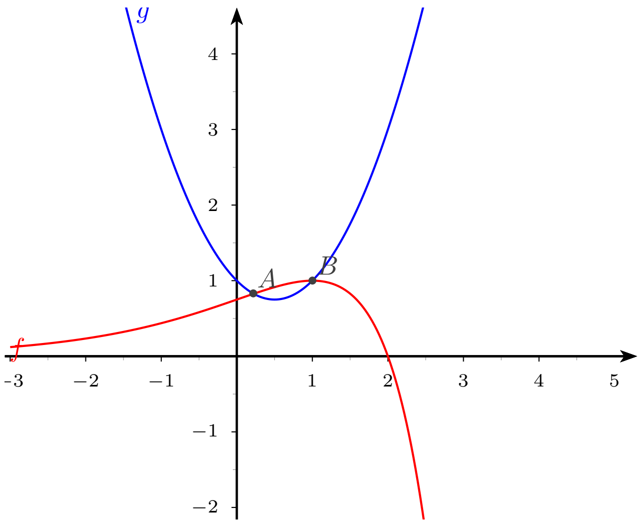




тачке пресека.

Уз помоћ програма $WolframAlfa$ одмах добијамо оба решења.
Друго решење $\quad -1,10624871406337\ldots$.

4. $x^2-x+1=2\cdot 2^{x-1}-4^{x-1}$
Ево још једног задатка идеалног за графичко решавање.
$x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$
$2\cdot 2^{x-1}-4^{x-1}=2^x-\dfrac{4^x}{4}=-\dfrac{1}{4}(4^x-4\cdot 2^x)=-\dfrac{1}{4}(2^x-2)^2+1$



$A(0,22;0,83)\quad B(1,1)$

5. Решити неједначину $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{|x-1|}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{|x+1|}\leq 26$
Прва реакција ученика је да се ослободе апсолутне заграде. Ретки су ученици који ће приметити да је основа мања од 1, а експонент увек ненегативан, па су оба сабирка увек мања или једнака 1, што значи да је свако реално x решење ове неједначине.

6. $1<3^{|x^2-x|}\leq 9$
Једноставан задатак, али проверите колико ученика ће приметити да нема потребе за ,,физикалисањем" приликом решавања неједначине

$|x^2-x|>0$, односно да је она еквивалентна са $|x^2-x|\neq 0$ тј. $x\neq 0 \quad \wedge \quad \neq 1$.

7. Решити једначину $2^{\,3x^2-2x^3}=\dfrac{x^2+1}{x}$.

   Десну страну једначине можемо написати у облику $x+\dfrac{1}{x}$. Израз на десној страни је вечита загонетка, чак и за боље ученике. Како је лева страна позитивна, то и десна мора бити позитивна тј. $x>0$. Из односа аритметичке и геометријске средине

   $$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

   закључујемо да је десна страна једначине већа или једнака 2. Стога испитујемо за које x је експонент на левој страни већи или једнак 1.
   $3x^2-2x^3\geq 1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1\leq 0 \Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1\leq 0$
   $\Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x-1)(x+1)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1)\leq 0$
   $\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\leq 0$.
   Решење је $x=1$.

8. За које $a\in\mathbb{R}$ систем
   $2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1}=a$
   $8^{1+\sqrt{xy}}+27^{x+y-1}=a^3-3a^2+3a$
   има бар једно решење $(x,y)\,, x,y\in\mathbb{R}$?
   Задатак из сретнијих времена, са пријемног испита за техничке факултете (јун 1992.) . Данас више нико и не покушава да зада задатке овог нивоа на пријемном. Све смо подредили ,,стандардима" који не дозвољавају овакве ,,излете". Растављањем леве стране друге једначине добијамо
   $(2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1})\cdot(2^{2(1+\sqrt{xy})}-2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1}+3^{2(x+y-1)})=a^3-3a^2+3a$
   $(2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1})\cdot((2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1})^2-3\cdot 2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1})=a^3-3a^2+3a$
   $a\cdot(a^2-3\cdot 2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1})=a^3-3a^2+3a$
   $a^3-3a\cdot 2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1}=a^3-3a^2+3a$
   $2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1}=a-1$
   Почетни систем смо свели на систем:
   $2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1}=a \quad \wedge \quad 2^{1+\sqrt{xy}}\cdot 3^{x+y-1}=a-1$
   Формирамо квадратну једначину чија су решења $2^{1+\sqrt{xy}}$ и 3^{x+y-1}.
   $t^2-at+a-1=0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot(t+1-a)=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=a-1$.
   $2^{1+\sqrt{xy}}=a-1 \quad \wedge \quad 3^{x+y-1}=1$ ($2^{1+\sqrt{xy}}\neq 1$ јер је експонент позитиван)
   $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x \Rightarrow 1+\sqrt{xy}=1+\sqrt{x(1-x)}=1+\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$
   што значи да израз $1+\sqrt{x(1-x)}$ узима вредности из сегмента $[\,1,\frac{3}{2}\,]$.
   Да би систем имао бар једно решење мора да важи $a-1\in[2,2^{\frac{3}{2}}\,]$ тј. $a\in[\,3,1+2\sqrt{2}\,]$

9. За које вредности параметра a функција $f(x)=2e^x-ae^{-x}+(2a+1)x-3$ расте за свако $x\in\mathbf{R}$?
   Да би функција била растућа за свако $x\in\mathbf{R}$, њен први извод увек мора бити позитиван.

   $$f'(x)=2e^x+ae^{-x}+2a+1$$

Класична прича тече овако: уведемо смену $e^x = t$.

$2t + a\dfrac{1}{t} + 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2t^2 + (2a+1)t + a}{t} > 0$

Да би квадратна функција била позитивна за свако x њена дискриминанта мора бити негативна и коефицијент уз квадратни члан позитиван. Дискриминанта квадратне једначине једнака је $(2a-1)^2$, што значи да једначина има реалнa и различита решења (за $a = \frac{1}{2}$ решења су једнака) па не испуњава услов тј. закључујемо да такво a не постоји. Већи део ученика би урадио задатак на овај начин. Ретко који ученик ће приметити да је због природе смене ($e^x = t$), t позитивно за свако x, а да су могућа решења квадратне једначине негативна.

Мислимо да је у овом случају много ефикасније не уводити смену већ помоћи ученицима да препознају квадратни трином тј. написати израз у облику

$\dfrac{2e^{2x} + a + (2a+1)\cdot e^x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(e^x + a)(2e^x + 1)}{e^x} > 0$

Сада је очигледно да је решење $a \geq 0$.

Овај пример ми први пут није привукао пажњу јер ја у настави инсистирам на растављању квадратног тринома и избегавам увођење смене у свакој прилици. Али пре 20 година ме много искуснији колега упозорио да постоји штампарска грешка у збирци код овог задатка. Он га је урадио по првоизложеној методи и није приметио да прави грешку. Увек морамо бити пажљиви при решавању задатака!!!