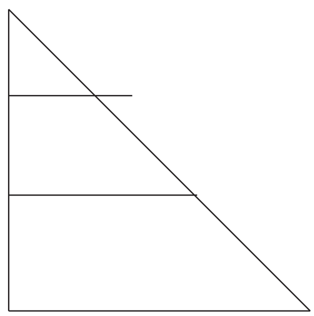
Предлог задатака за програм средњих стручних школа уз неколико примедби

У раду са децом најважније је заголицати их да питају КАКО, тек после тога ЗАШТО а ретко ШТА ЋЕ ТО МЕНИ. Ми као професори треба да им континуирано ширимо видике и да им доказујемо да је математика оруђе тј. инструмент за стварање прелепих ремек дела.

Како их увести у тригонометрију? На папиру нека нацртају што више фигура у склопу којих треба да има и углова. Затим цртеж нека погледају кроз лупу и нека одговоре на питање шта једино лупа није увећала. То су, наравно, углови. То нешто што се одупире и лупи заслужује да буде предмет изучавања читаве области математике.

Следећи уводни пример могао би бити:



Ученици мере и рачунају однос између ивица, на тај начин нумеричку вредност повезују са односом. Професори су често склони недовољном наглашавању основних принципа који зато остану у сенци масе детаља који прате излагање тригонометрије.

Апсурд који се дешава у средњим стручним школама је да се у првом разреду у оквиру математике изучава само тригонометрија правоуглог троугла а да се механика коју ђаци слушају у првом разреду ослања на тригонометрију тупоуглог троугла као и на синусну и косинусну теорему, тако да ми препуштамо колегама којима то није ужа специјалност да ђаке први пут уведу у свет тригонометрије. Исти апсурд се дешава и током слушања предмета Основи електротехнике у коме се као један од основних елемената за рад користи тригонометријски облик комплексних бројева који се налази у плану и програму математике тек у трећем разреду???!!!

Пример: Наизменична струја i_1 предњачи струји $i_2 = 5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ за угао $\frac{\pi}{3}$. Представити струје i_1, i_2 ако је $I_{m1} = I_{m2}$.

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),\ \underline{I} = \frac{I}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} \qquad i_1 = 5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \dots 5\sin(\omega t + \pi)$$

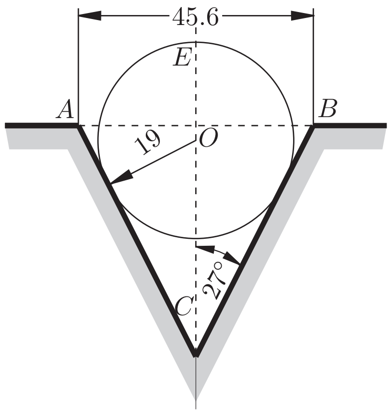
$$\underline{I_1} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{j\pi} = -\frac{5}{\sqrt{2}} \qquad \underline{I_2} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = \dots = -\frac{5\sqrt{2}}{4} + j\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

И струје још треба представити у координатном систему...

У пракси се показало да је тригонометријски круг основ на који треба ставити нагласак! Можда размислити и о томе да га треба обрадити у првом разреду...

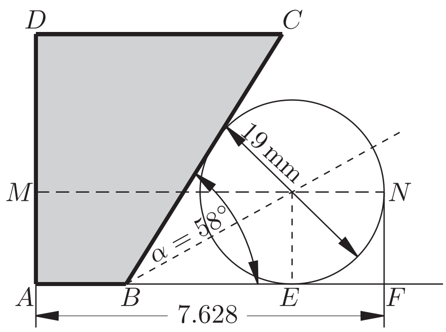
После дефинисања тригонометријских функција правоуглог троугла дати што више примера који имају додира са стручним предметима које ђаци изучавају:

1. У вертикални усек смештен је ваљак са пречником 38 mm. Одреди за колико је центар O нижи од AB и колико је удаљена највиша тачка ваљка E изнад AB (сл. 1).



Слика 1.

2. Ваљак пречника 38 mm прислоњен је уз челични предмет према сл. 2 Дуж AD је нормална на хоризонтали AF. Дуж MN измерена је микрометром и износи 7,628 cm. Израчунај AB.



Слика 2.

Следи неколико „згодних“ задатака којима се може проверити да ли ученици повезују тригонометријске функције са троугловима:

1. Постоји ли $\sin\sqrt{2}$, а за које x је $\sin x = \sqrt{2}$?
2. Испитати тачност неједнакости $\sin x + \cos x > 1$ и $\sin x + \cos x < 1$ у интервалу $(0, \pi/2)$.

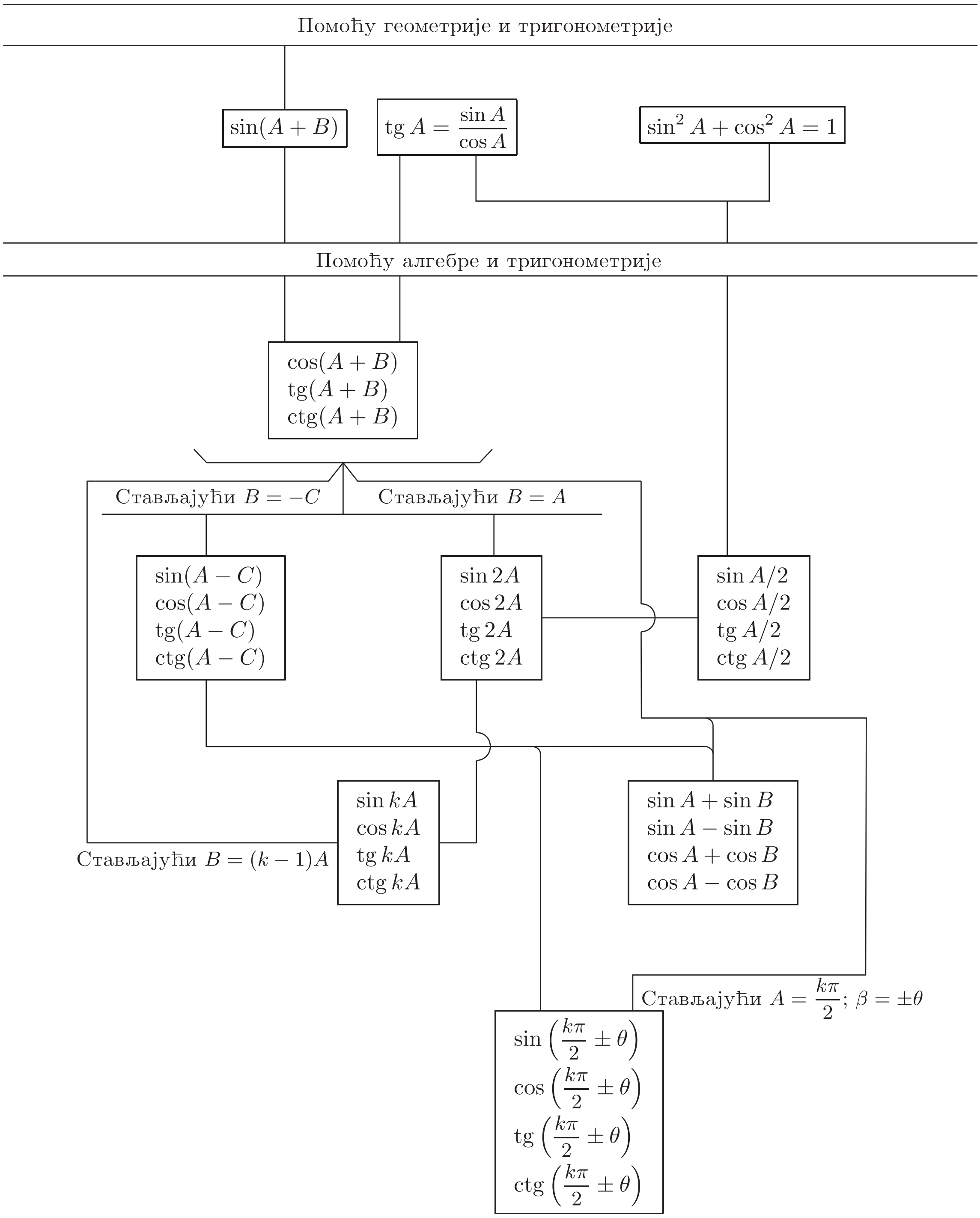
   (Користи се однос између страница троугла)
3. За које вредности $x \in (0, \pi)$ није дефинисана ф-ја $\dfrac{3}{\sin x + \cos x}$.

   (Овде се потпуно види лакоћа решавања задатака употребом тригонометријске кружнице).
4. Докажи $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} > 0$.

   (после одређивања области дефинисаности израз се своди на $\dfrac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\sin x)} > 0 \ldots$)

5. Наћи најмању и највећу вредност ф-је:
   a. $2 + \cos 2x$
   b. $1 + 2\sin 3x$
   c. $1 + \cos x$.
6. Ако је $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$, $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $a > \frac{1}{2}$ тада је $\sin\alpha = -\frac{a-1}{a}$. Доказати.
   (Провери се да ли $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ припадају интервалу $(-1,0)$)
7. Постоји ли оштар угао α ако је:
   a. $\sin\alpha = -0{,}4$;
   b. $\sin\alpha = \frac{a+1}{a}$, $a > 0$;
   c. $\operatorname{tg}\alpha = 10^{10}$;
   d. $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 5$;
   e. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}}$;
   f. $\operatorname{ctg}\alpha = 2 - \sqrt{7}$.
8. Ако су α, β и γ углови троугла тада важи $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$. Докажи.
   (свођењем на први квадрант добија се $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\ldots$)
9. Ако је r полупречник кружнице која је описана око правилног n-тоугла, показати да се површина тог n-тоугла може израчунати по формули:
$$P = nr^2 \sin\frac{180^\circ}{n} \cos\frac{180^\circ}{n}.$$
10. Решити троугао ако је $a = 4$, $b = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 30^\circ$.
    (Овде се лако види да се задатак решава применом синусне теореме, али честа грешка коју ђаци праве је да не узму у обзир сва решења задатка: код $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ одговор увек буде 45°, а у већини случајева забораве 135° (*овде им обавезно треба нацртати тригонометријски круг, са њега прочитати решења и стално на томе инсистирати*). Два решења се добијају јер је дат угао наспрам краће странице те је ово згодно место да се подсете одговарајућег правила подударности).
11. Ако су a, b и c странице троугла, доказати да за тежишну дуж t_a важи једнакост
$$t_a = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$
    (Примена косинусне теореме)
12. Дата је функција $y = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha$, одреди α тако да њен график додирује x-осу.
13. Доказати да за сваки оштар угао α мањи од 45° важи $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha < 2\sin\alpha$.
    (Доказ: нацртати правоугли троугао, поделити га на једнакокрако тупоугли, што дозвољава услов $\alpha < 45^\circ$, искористити особину спољашњег угла троугла... иста слика и за следећи задатак)
14. Ако су α и β оштри углови правоуглог троугла и $\alpha < \beta$ доказати да је:
$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{2ab}{c^2}.$$
15. У једначини $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha} = m$ одреди m ако је угао α оштар.

Ево још једног примера како избећи страх од мора образаца и показати им да помоћу три можемо извести све остале:



Формула за $\sin(A+B)$ мора се извести независно, из геометријских разматрања, нпр. $\sin(A-B) = \sin\left[A+(-B)\right]$ или $\cos(A+B) = \sin\left[90^\circ - (A+B)\right] = \sin\left[(90^\circ - A) - B\right] \ldots$

Идентитете увек радити после растављања полинома на чиниоце.

16. Доказати да израз $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ не зависи од α.

17. Збир квадрата дијагонала паралелограма једнак је збиру квадрата његових страница. Доказати. (Примена косинусне теореме)

18. Доказати да је површина троугла $P = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, где је r полупречник описане кружнице.

19. Одреди скуп вредности ф-је $y = \dfrac{3}{\sqrt{2-\sin x}}$.

20. Реши једначину $\sin\dfrac{\pi}{x} = 1$. Колико решења има ова једначина на интервалу $[0{,}001\,;\,0{,}002]$?

21. Изразити помоћу $\operatorname{tg}\alpha$:
   a. $\dfrac{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$
   b. $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}$
   c. $\dfrac{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{\cos^5\alpha - \sin^5\alpha}$.

22. За коју вредност параметра t израз $M = \sin^6 x + \cos^6 x + t(\sin^4 x + \cos^4 x)$ не зависи од x и колика му је тада вредност?

23. Ако је α оштар угао, доказати неједнакост

$$\sqrt{\sin\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\cos\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}\alpha} \geq \sqrt[4]{8}.$$

(Нека је $\sin\alpha\cos\alpha = p > 0$ јер је угао оштар. Важи

$$\sqrt{\sin\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\cos\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{\sin\alpha}\sqrt[4]{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + \cos\alpha\sqrt[4]{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt[4]{p}} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{2p}\,)^2 + 2\sqrt{2p}}}{\sqrt[4]{p}} \geq \frac{\sqrt{2\sqrt{2p}}}{\sqrt[4]{p}} = \sqrt[4]{8})$$

24. Одреди знак разлике:
   a. $\cos 5\frac{1}{6}\pi - \cos 5\frac{1}{7}\pi$
   b. $\cos 310^\circ - \cos 347^\circ$
   c. $\operatorname{tg} 4\frac{1}{8}\pi - \operatorname{tg} 4\frac{1}{9}\pi$.

25. Да ли постоји угао α такав да је $2\sin\alpha + 5\cos\alpha = 7$?

26. Израчунати $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$.

27. Ако су произвољни реални бројеви $x_1, \ldots, x_n$ за сваки природан број $n \geq 2$ одреди највећу могућу вредност израза:

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_{n-1}\cos x_n + \sin x_n \cos x_1.$$

(користи се позната неједнакост која важи за реалне бројеве $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$)

Примери зашто је лакше радити са тригонометријским обликом комплексног броја:

28. Доказати да важи једнакост:

$$\frac{(-1+i\sqrt{3}\,)^{15}}{(-1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3}\,)^{15}}{(1+i)^{20}} = -64.$$

29. Доказати:

$$(\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}.$$

30. Применом Ојлерове формуле доказати да је i^i реалан број који има бесконачно много вредности.

Ђаке што више треба упућивати на рад са радијанима. Наилазићете на отпор али ево једног примера који ће их заголицати и на коме ће увидети колико је лакше радити у радијанима: Ево сада је тачно (ПОГЛЕДАМ У САТ) па израчунајте тачан угао између казаљки.