Предлог задатака за програм гимназија уз неколико примедби

1. Доказати да вредност израза $E = \dfrac{\cos 2x - (m-1)\cos 4x + m}{\sin(\frac{\pi}{6}+x)\sin(\frac{\pi}{6}-x) + m\sin^2 x}$ не зависи од вредности параметра m.

   Решење: Задатак са пријемног испита на ЕТФ-у 1987. године.
   Овакве задатке одавно не можете видети на пријемним испитима на нашим факултетима, не зато што састављачи немају идеја, већ зато што је данас ниво захтева у средњим школама до те мере опао да је илузија очекивати да задатак ове тежине може да уради бар 10% кандидата. Неко коме кажете, у другом разреду гимназије, да може да користи папир са формулама из тригонометрије од тог тренутка па до краја четвртог разреда, никада неће досећи ниво знања потребан за овакав задатак.

$$E = \frac{\cos 2x - (m-1)\cos 4x + m}{\sin(\frac{\pi}{6}+x)\cdot\sin(\frac{\pi}{6}-x) + m\sin^2 x} = \frac{\cos 2x - (m-1)(2\cos^2 2x - 1) + m}{\frac{1}{2}(\cos 2x - \frac{1}{2}) + m\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$= \frac{-2(m-1)\cos^2 2x + \cos 2x + 2m - 1}{\frac{1}{2}(\cos 2x - \frac{1}{2} + m - m\cos 2x)} = \frac{(2-2m)\cos^2 2x + \cos 2x + 2m - 1}{\frac{1}{4}(2\cos 2x - 1 + 2m - 2m\cos 2x)}$$

$$= \frac{(2-2m)\cos^2 2x + (2-2m)\cos 2x + (2m-1)\cos 2x + 2m - 1}{\frac{1}{4}((2-2m)\cos 2x + 2m - 1)}$$

$$= \frac{(2-2m)\cos 2x(\cos 2x + 1) + (2m-1)(\cos 2x + 1)}{\frac{1}{4}((2-2m)\cos 2x + 2m - 1)}$$

$$= \frac{4(\cos 2x + 1)((2-2m)\cos 2x + 2m - 1)}{(2-2m)\cos 2x + 2m - 1} = 4\cdot 2\cos^2 x = 8\cos^2 x$$

   Трансформација израза тако да различите тригонометријске функције сведемо на исту функцију !
   Записивање израза из бројиоца као сређени полином другог степена !
   Растављање квадратног тринома !!!

2. У ком интервалу лежи реалан параметар λ да би једначина $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \lambda$ имала решење из интервала $(\,0, \frac{\pi}{2}\,)$.

   Решење: Како једначину решавамо на датом интервалу то важи $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. Закључујемо да је $\lambda > 0$ и квадрирањем једначине добијамо $1 + 2\sin x\cdot\cos x = \lambda^2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$. Сменом $\sin 2x = t$ једначина постаје $\lambda^2 t^2 - 4t - 4 = 0$, односно $t_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$. Због услова $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $\sin 2x > 0$ па одговара само $t = \dfrac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$.

Вредности параметра λ добијамо као решења неједначине
$\dfrac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2} \leq 1$ тј. $\lambda \geq 2\sqrt{2}$

3. Доказати да функција $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ не може имати вредности из интервала $(\frac{1}{9}, \frac{3}{2})$

Ученици пред оваквим задатком моментално објављују ,,предају". Ако задате класику типа $y = 2\sin 3x - \frac{1}{2}$ то може да прође, али већ са $y = 7\sin x - 15\cos x$ најављена је пропаст. Уз доста наговарања понеко се одважи да крене у авантуру решавања задатка, али опет ,,мука", ко да се сети свих формула. Обавезно треба искористити сваку прилику и подсетити ученике како се из адиционих формула лако изводе све остале.

Решење: $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x\,, \quad \operatorname{tg} 3x = \dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} \quad \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}$

$f(x) = \dfrac{(3-\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg}^2 x)}{2(1-3\operatorname{tg}^2 x)}\,,\ y = \dfrac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)}\,,\ 2y(1-3a) = 3-4a+a^2$

$a^2 + 2a(3y-2) - (2y-3) = 0$ Ова једначина нема решења ако је њена дискриминанта мања од 0 или ако су решења негативна.

$D = 4(3y-2)^2 + 4(2y-3) = 9y^2 - 10y + 1 = (y-1)(9y-1) < 0 \Rightarrow y \in (\frac{1}{9}, 1)$

Да би решења квадратне једначине била негативна важи

$D \geq 0 \,\wedge\, a_1 + a_2 < 0 \,\wedge\, a_1 \cdot a_2 > 0$

$a \in (-\infty, \frac{1}{9}] \cup [1, +\infty) \,\wedge\, -2(3y-2) < 0 \,\wedge\, -2y + 3 > 0$

$a \in (-\infty, \frac{1}{9}] \cup [1, +\infty) \,\wedge\, y \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2},) \Leftrightarrow y \in [1, \frac{3}{2})$

Коначно, једначина нема решења за $y \in (\frac{1}{9}, 1) \vee y \in [1, \frac{3}{2})$ тј. $y \in (\frac{1}{9}, \frac{3}{2})$

4. Ако су α, β и γ углови троугла, доказати да важе релације:

а) $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6$; б) $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}$;

в) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$; г) $1 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$

д) $2 < \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$; ђ) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1$

Решење:

а)$\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}} \geq$

$3 \cdot 2 = 6$

Користили смо:

1° однос аритметичке и геометријске средине $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

$$2^\circ \ \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(1 - \sin\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{1}{8}$$

3° $y = \frac{1}{2}x(1-x) = -\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8}$

Како је $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$ то је $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 8$

па важи $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}} \geq 2$

б) $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\dfrac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\dfrac{\gamma}{2}=$
$8(\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2})^2\le 8\cdot\dfrac{1}{64}=\frac{1}{8}$

в) $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\;=\;\dfrac{1-\cos\alpha}{2}+\dfrac{1-\cos\beta}{2}+\dfrac{1-\cos\gamma}{2}=$
$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\;=\;\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\cos\alpha+2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)=$
$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\cos\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)\;\ge\;\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\cos\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)=$
$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=$
$\dfrac{3}{2}+\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}+\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2$
$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\dfrac{3}{4}$

5. За које вредности параметра a неједначина
$a\sin^2 x+2(a+1)\sin x+a-4>0$ нема решења?

Решење: Уведимо смену $\sin x=t$.
Тада је $at^2+2(a+1)t+a-4>0\ \land\ t\in[-1,1]$
За $a=0$ имамо $2t-4>0\ \Leftrightarrow\ t>2$ тј. неједначина нема решења.
$a\neq 0$: неједначина неће имати решења ако је квадратни трином непозитиван за свако t или је позитиван за $t\notin[-1,1]$.
Да би квадратни трином био непозитиван услов је:

$$a<0\ \land\ D\le 0$$

$$a<0\ \land\ 4(a+1)^2-4a(a-4)\le 0$$

$$a<0\ \land\ 6a+1\le 0\ \Leftrightarrow\ a<0\ \land\ a\le-\frac{1}{6}\ \Leftrightarrow\ a\le-\frac{1}{6}$$

$$a\in\left(-\frac{1}{6},0\right)\Rightarrow D>0$$

$$t_{1,2}=\frac{-2(a+1)\pm 2\sqrt{6a+1}}{2a}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{6a+1}}{a}$$

$$t_1=\frac{\sqrt{6a+1}-a-1}{a},\ t_2=\frac{-\sqrt{6a+1}-a-1}{a}$$

$$t_2>t_1$$

Трином ће бити позитиван за $t\notin[-1,1]$, ако је $t_2<-1\ \lor\ t_1>1$

$$\frac{-\sqrt{6a+1}-a-1}{a}<-1\ \lor\ \frac{\sqrt{6a+1}-a-1}{a}>1$$

$$-\sqrt{6a+1}-a-1>-a\ \lor\ \sqrt{6a+1}-a-1<a$$

$$\sqrt{6a+1}+1<0\ \lor\ \sqrt{6a+1}<2a+1$$

$$\perp\ \lor\ 6a+1<4a^2+4a+1$$

$$4a^2-2a>0\ \Leftrightarrow\ 2a(2a-1)>0$$

$$a\in(-\infty,0)\cup(1/2,+\infty)$$

$$a \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

$a \in (0, +\infty)$: да неједначина $at^2 + 2(a+1)t + a - 4 > 0$ не би имала решења мора бити

$$t_1 = \frac{\sqrt{6a+1} - a - 1}{a} = -1 - \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{6a+1}}{a} \quad t_2 = -1 - \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{6a+1}}{a}$$

$$t_2 \le -1 \ \wedge \ t_1 \ge 1$$

$t_2 < t_1$, како је $t_2 \le -1$, $\forall a \in (0, +\infty)$ и $t_1 \ge 1$, $a \in [0, \frac{1}{2}]$ тј. $a \in [0, \frac{1}{2}]$ коначно решење је $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

6. Решити једначину $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$

   Једначина је дефинисана за $x \in [-1, 1]$, па можемо увести смену $x = \sin\alpha\,, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   $\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha \Leftrightarrow |\cos\alpha| = -\sin 3\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sin 3\alpha$

   $\sin 3\alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = 0$

   $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 0 \vee \cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = 0$

   $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

   $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{8} \vee \alpha = \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow$ $\boxed{x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ или $\boxed{x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

7. Решити једначине:

   а) $\sin x + \sin 5x = 2$; б) $\sin 2x \cdot \sin 6x = 1$

   Решење: Два лепа примера који могу да помогну ученицима да разјасне начин записивања решења тригонометријских једначина, тј. да ли је битно записивати фамилије решења користећи различита слова за целе бројеве.

   а) $\sin x + \sin 5x = 2$. Како је лева страна збир две синусне функције јасно је да је њена максимална вредност једнака 2, тј. једнакост важи само за оне вредности променљиве x за које су оба сабирка једнака 1.
   $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge 5x_l = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ односно $x_l = \frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5}$
   Да би једначина имала решење мора да важи
   $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5}$ односно $l = 5k + 1$. Како је ова релација могућа то значи да ова једначина има решења.
   б) Једнакост је могућа само за оне вредности променљиве x за које су оба чиниоца једнака 1 односно -1.
   $2x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge 6x_l = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x_l = \frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{3} \Leftrightarrow$ $1 + 6k = 2l$. Како ова релација није могућа, закључујемо да у овом случају једначина нема решења.
   Аналогно важи и за случај да су оба чиниоца једнака -1.

8. Решити једначине :

   а) $\sin x = x^2 + x + 1$;   б) $\log_2\left(\cos^2(xy) + \dfrac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \dfrac{1}{y^2 - 2y + 2}$

   а) Леп пример који може да реши скоро сваки ученик, мислим да скицирање графика сваке функције посебно не би требао да буде превелики изазов за било којег ученика. Када им будете помогли да споје одвојене цртеже без проблема ће наћи решење, тј. откриће да једначина нема решење.

   б) Ако функцију на десној страни напишемо у канонском облику, тј. $(y-1)^2+1$ видимо да је њен минимум једнак 1, па је максимална вредност израза на десној страни једнака 1 за $y = 1$. Аргумент функције на левој страни је дефинисан за свако $xy \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ако искористимо однос аритметичке и геометријске средине, закључујемо да је минимална вредност аргумента логаритамске функције једнака 2 за $\cos^2(xy) = 1$, што значи да је минимална вредост леве стране једначине једнака 1. У том случају једначина има решење ако је $y = 1$ и $xy = k\pi, k \in \mathbf{Z}, (\cos xy = 1 \vee \cos xy = -1)$. Решење једначине су уређени парови облика $\{(k\pi, 1) | k \in \mathbf{Z}\}$.

9. Решити неједначину $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$

   Решење: Област дефинисаности неједначине је интервал $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Очигледно је да $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$ нису решења неједначине. На интервалу $(0, \dfrac{\pi}{2})$ важи $0 < \sin x < 1$ и $0 < \cos x < 1$, па можемо применити неједнакост $\sqrt{t} > t^2, t \in (0,1)$. Обавезно нацртајте графике ових функција на интервалу $[0,1]$. Стога је
   $\sqrt{\sin x} > \sin^2 x \wedge \sqrt{\cos x} > \cos^2 x \Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > \sin^2 x + \cos^2 x$.
   Решење неједначине је $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

10. Поређати по величини бројеве $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5, \sin 6, \sin 7, \sin 8$

    Решење: Инсистирајте да сви ученици нацртају тригонометријску кружницу (јединица мере $2\,cm$). Затим их подсетите на радијанску меру угла и покушајте да што прецизније нацртате одговарајуће тачке на кружници (наравно да треба инсистирати да се обави дељење $180 : 3,14$)

Задаци са пријемних испита

1. Вредност $\cos 2010^\circ$ једнака је :
   А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{1}{2}$; Д) -1

2. Збир решења једначине $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ на интервалу $(0, 2\pi)$ једнак је :
   А) 3π ; Б) 0 ; В) $\frac{7\pi}{6}$; Г) π ; Д) 2π

3. Вредност израза $3\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \operatorname{ctg}(-45^\circ)$ је:
А) -1 Б) 0 ; В) $-\sqrt{2}$; Г) 1 ; Д) $\sqrt{2}$

4. Вредност израза $\sin^4\frac{5\pi}{6} - \cos^4\frac{5\pi}{6}$ једнака је:
А) $-\frac{1}{2}$; Б) 1 ; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{1}{2}$; Д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Ако је $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, онда је вредност израза $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ једнака:
А) $2/3$; Б) $3/4$; В) $4/5$; Г) $5/6$; Д) $6/7$.

6. Дата је једначина $\sin 5x - \sin x + 3\cos 3x = 0$. Збир квадрата најмањег позитивног и највећег негативног решења те једначине је:
А) $\dfrac{2\pi^2}{9}$; Б) $\dfrac{\pi^2}{18}$; В) $\dfrac{\pi^2}{8}$; Г) $\dfrac{5\pi^2}{18}$; Д) $\dfrac{13\pi^2}{16}$.

7. Број решења једначине $\sin x\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ која припадају интервалу $[0, \pi/2]$ је:
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) 4.

8. Вредност израза $\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}50^\circ$ је:
А) 0; Б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; В) $\dfrac{1}{3}$; Г) $\sqrt{3}$; Д) 1.

9. Укупан број реалних решења једначине $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$ на сегменту $[0, 2\pi]$ је:
А) 3; Б) 4; В) 6; Г) 7; Д) 0.

10. Ако је $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $(a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$, тада је $\sin x$ једнак:
А) $\dfrac{b-a}{b+a}$; Б) $\sqrt{b} - \sqrt{a}$; В) $\dfrac{a+b}{a-b}$; Г) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; Д) $1 - \dfrac{b}{a}$.

11. Збир свих решења једначине $\cos x - 2\sin^2 x + 1 = 0$, $x \in [0, 2\pi]$ је:
А) 5π; Б) 4π; В) 3π; Г) $5\pi/2$; Д) $7\pi/2$.

12. Израз $\cos^4 x + \sin^4 x$ идентички је једнак изразу:
А) 1; Б) $1+\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$; В) $1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$; Г) $1-\dfrac{1}{2}\cos^2 2x$; Д) $1+\dfrac{1}{2}\cos^2 2x$.

13. Вредност израза $2\sin 240^\circ - 2\cos 135^\circ + 3\operatorname{ctg}60^\circ$ је:
А) $-\sqrt{3}$; Б) 0; В) $-\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{2}$.

14. Број оних решења једначине $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ која припадају интервалу $(0, 2\pi)$ једнак је:
А) 1; Б) 4; В) 3; Г) 2; Д) 0.

15. Вредност $\sin 3810^\circ$ једнака је:
А) $\sqrt{3}/2$; Б) $-\sqrt{3}/2$; В) $1/2$; Г) $-\sqrt{2}/2$; Д) $-1/2$.

16. Број решења једначине $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ која припадају интервалу $(\pi/2, 3\pi/2)$ је:

А) 3; Б) 5; В) 4; Г) 2; Д) 1.

17. Вредност израза $\dfrac{6\sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ}{\cos 20^\circ}$ је:

А) 3; Б) 1.5; В) 12; Г) 6; Д) 2.

18. Дате су функције $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$ и $f_3(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$. Тачно је тврђење:

А) све дате функције су једнаке међу собом; Б) међу датим функцијама нема једнаких; В) $f_1 = f_2 \neq f_3$; Г) $f_1 \neq f_2 = f_3$; Д) $f_1 = f_3 \neq f_2$.

19. Вредност израза $\left(1 - \sin\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1 + \sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ је:

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; Б) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$; В) $\dfrac{1}{4}$; Г) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; Д) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

20. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{3}$. Тада је израз $\dfrac{\sin\alpha + \sin(\alpha - 2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha - 2\beta)}$ једнак:

А) $\dfrac{1}{7}$; Б) $\dfrac{1}{6}$; В) 1; Г) 2; Д) $\dfrac{1}{5}$.

21. Збир квадрата најмањег позитивног и највећег негативног решења једначине $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ је:

А) $\dfrac{2\pi^2}{9}$; Б) $\dfrac{5\pi^2}{36}$; В) $\dfrac{\pi^2}{2}$; Г) $2\pi^2$; Д) $\dfrac{\pi^2}{8}$.

22. Вредност израза $\dfrac{\sin 70^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 190^\circ}$ је:

А) $-\dfrac{1}{2}$; Б) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; В) $-\sqrt{3}$; Г) -1; Д) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

23. Број решења једначине $\sin 2x = \cos x$ на интервалу $[-\pi, 2\pi]$ је:

А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 5; Д) већи од 5.

24. Израз $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ идентички је једнак изразу:

А) $3\sin\alpha$; Б) 0; В) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; Г) $\sin\alpha$; Д) $2\sin\alpha$.

25. Ако је $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}, \beta \in (\pi, 2\pi)$, онда је $\cos(\alpha - \beta)$:

А) $\dfrac{33}{65}$; Б) $\dfrac{16}{65}$; В) $-\dfrac{16}{65}$; Г) $\dfrac{56}{65}$; Д) $-\dfrac{33}{65}$.

26. Израз $(\cos x + \sin x)^2$ идентички је једнак изразу:

А) 1; Б) $\sin 2x - 1$; В) $1 + \sin 2x$; Г) $\cos 2x - 1$; Д) $1 + \cos 2x$.

27. Вредност израза $\dfrac{\cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \cos^2 120^\circ}$ је:

А) $-\sqrt{3}$; Б) -1; В) $\sqrt{3}$; Г) 1; Д) 0.

28. Број оних решења једнахцине $2\cos 2x + 4\cos x = 1$ која припадају интервалу $[0, 2\pi]$ једнак је:

А) 1; Б) 3; В) 0; Г) 4; Д) 2.

29. За све вредности $x \in (-\pi/4, \pi/4)$ је $\operatorname{tg} 2x$ једнако:

А) $2x \operatorname{tg} 1$; Б) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; В) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; Г) $2\operatorname{tg} x$; Д) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$.

30. Број решења тригонометријске једначине $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$, која припадају интервалу $[2006\pi, 2007\pi]$, једнак је:

А) 2; Б) 1; В) 3; Г) 4; Д) 5.

31. Вредност израза $\dfrac{\sin 32^\circ + 5\cos 58^\circ}{2\cos 58^\circ}$:

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) $\sqrt{3}$; Д) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

32. Вредност израза $\sin(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}}) + \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ је:

А) $\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; Б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{6}$; В) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; Г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{3}$; Д) није дефинисано.

33. Дати су бројеви $a = \dfrac{\sin 1}{\sin 2}$, $b = \dfrac{\sin 2}{\sin 3}$ и $c = \dfrac{\sin 3}{\sin 4}$. Тада је:

А) $a < b < c$; Б) $c < b < a$; В) $c < a < b$; Г) $b < a < c$; Д) $a < c < b$.

34. Вредност израза $\dfrac{\sin 86^\circ + \sin 76^\circ - \sin 26^\circ - \sin 16^\circ}{\cos 86^\circ + \cos 76^\circ + \cos 26^\circ + \cos 16^\circ}$ износи:

А) $\sqrt{3}$; Б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; Г) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; Д) 0.

35. Једначина $(a-1)\sin x = a+1$ има решења акко вредност параметра a припада скупу:

А) $(-\infty, -1]$; Б) $[-1, 1]$; В) $(-\infty, 0]$; Г) $\emptyset$; Д) $[0, +\infty)$.

36. Број оних решења једначине $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$ која припадају интервалу $[0, 2\pi]$ једнак је:

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 2; Д) 6.

37. За све $x \in \mathbf{R}$, $cos2x$ је једнако:

А) $1 - 2\cos^2 x$; Б) $2x \cos 1$; В) $2\sin x \cos x$; Г) $\cos^2 x - \sin^2 x$; Д) $2\cos x$.