Теорија бројева *

1. У броју $n = \overline{1995ab}$ одредити непознате цифре a и b тако да добијени шестоцифрени број n буде дељив са 72.

2. Одредити све цифре a и b тако да је збир бројева $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ дељив са 18.

3. Производ два двоцифрена броја записан је само помоћу четворки. Одредити те бројеве.

4. Написано је првих 180 природних бројева. Избрисани су сви природни бројеви који се завршавају нулом. Затим су избрисани сви дељиви са 4, а потом сви дељиви са 3. Колико је бројева остало?

5. Дат је природан број чији декадни запис садржи 1994 јединице, 1994 двојке и известан број нула. Доказати да дати број није квадрат природног броја.

6. Ако је $n \in N$, онда је израз $\dfrac{n^2}{2} - \dfrac{2n}{3} + \dfrac{n^3}{6}$ цео број. Доказати.

7. а) Израз $a^4 + 4b^4$ написати у облику производа два полинома.
   б) Доказати да је број $2^{1994} + 5^{1996}$ сложен.

8. Одредити све просте бројеве p тако да је $\frac{665}{1993} < \frac{5}{p} < \frac{997}{1994}$.

9. Одредити све двоцифрене природне бројеве за које важи : тај број и број написан истим цифрама у обрнутом редоследу су прости.

10. Нека је $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{1995}$. Доказати да је S дељиво са 39.

11. Доказати да је $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2003}$ дељиво са 31.

12. Нека је $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1995}$. Доказати :
    а) $S = 2(2^{1995} - 1)$; б) S је дељиво са 434.

13. Доказати да $37 \,|\, (333^{2003} + 555^{2003})$.

14. Доказати да је $7^{1996} - 1$ дељиво са 10.

15. Нека је $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \ldots + p_{1996}^{1996}$, где су бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_{1996}$ првих 1996 простих природних бројева. Доказати да $5 \,|\, S$.

---

*Збирка 1000 задатака, ДМС

16. Ако је $n_1+n_2+\ldots+n_{1997}$ дељиво са 30, онда је и $n_1^5+n_2^5+\ldots+n_{1997}^5$ дељиво са 30, где су $n_1,n_2,\ldots,n_{1997}$ природни бројеви. Доказати.

17. Ако је $n \in N$, онда је $n^3+1997n+1998$ дељиво са 6. Доказати.

18. Доказати да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити квадрат природног броја.

19. Доказати да је $1991\cdot1993\cdot1995\cdot1997+16$ потпуни квадрат неког природног броја. Ако је $n\in N$, да ли је тада и израз $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$, такође потпун квадрат?

20. Одредити све $n \in N$ за које је вредност израза $n^2+2n+1997$ потпун квадрат неког природног броја.

21. Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?

22. Дат је природан број $n=\underbrace{111\ldots11}_{1994}\underbrace{222\ldots22}_{1994}$. Доказати да је тада израз n^3-3n^2-18n дељив са 13200.

23. Могу ли се бројеви $2,2^2,2^3,2^4,\ldots,2^{1995},2^{1996}$ поделити у два скупа без заједничких елемената, тако да је збир бројева у једном скупу једнак збиру бројева у другом скупу? Зашто?

24. Којом цифром се завршава број $1^{1996}+2^{1996}+\ldots+1996^{1996}$?

25. Наћи све природне бројеве облика $222\ldots22$ које можемо представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја.

26. Дата су три тврђења:
а) Број $n+29$ је потпун квадрат неког природног броја.
б) Број n се завршава цифром 8.
ц) Број $n-60$ је потпун квадрат неког природног броја.
Одредити $n\in N$, ако се зна да су два од датих тврђења тачна, а једно нетачно.

27. Одредити три последње цифре броја $n=2^{2008}-2^{2006}+2^{2003}$.

28. Дато је било којих пет природних бројева. Доказати да се међу њима увек могу изабрати два природна броја m и n тако да је m^4-n^4 дељиво са 15.

29. Бројеви $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2},\ldots,$ $\frac{1}{2^{100}}$ разбијени су у пет група по двадесет бројева. Производ бројева бар једне групе мањи је од $(\frac{1}{2})^{100}$. Доказати.

30. Нека је $A=2\cdot4\cdot6\ldots2002$ и $B=1\cdot3\cdot5\ldots2001$. Доказати да је број $A+B$ дељив са 2003.

31. Одредити сва решења једначине $2x^2-y^2=y^2+1994$ у скупу целих бројева.

32. Одредити све $a,b,c\in N$, такве да је $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=1$.

33. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је $3x + 8y = 1996$?

34. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 1997$?

35. Ако су $n_1, n_2, \ldots, n_{1998} \in N$ такви $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$, доказати да су бар два од тих бројева парни.

36. У xOy равни дата је права $4x + 7y = 1998$. Колико тачака на тој правој имају обе координате целобројне и припадају првом квадранту координатне равни?

37. Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, таквих да је $p^2 - 2q^2 = 1$.

38. Постоје ли међусобно различити прости бројеви p, q, r такви да је $pq + qr + rp = 2002$?

39. Наћи сва целобројна решења једначине $2^x + 1 = y^2$.

40. Нека је $S(n)$ збир цифара природног броја n. Одредити n ако је: а) $n + S(n) = 2002$; б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.

41. Нека је $S(m)$ збир цифара природног броја m. Низ бројева формира се на следећи начин: $a_1 = n$, где је n неки природан број и $a_2 = a_1 - S(a_1)$, $a_3 = a_2 - S(a_2), \ldots$ Ако је $a_{13} = 0$ први члан у низу који је једнак 0, одредити n.

42. Одредити све парове природних бројева (m, n) за које израз $\left|\dfrac{m}{77} - \dfrac{n}{13}\right|$ има најмању могућу позитивну вредност.

43. Збир 1999 различитих простих природних бројева је паран број.
а) Да ли је производ тих 1999 простих бројева паран или непаран број?
б) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир паран број.
ц) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир непаран.

44. Одредити најмањи природан број n, који има број делилаца једнак броју делилаца броја 1998, при чему се делиоцима природног броја сматрају и 1 и сам тај број.

45. Нека су a и b цели бројеви такви да је израз $a^2 + 9ab + b^2$ дељив са 11. Доказати да је тада израз $a^2 - b^2$ дељив са 11.

46. Одредити цифре x, y и z тако да у декадном систему важи једнакост $\dfrac{1}{x + y + z} = 0, xyz$.

47. Доказати да је број $\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5$ потпун квадрат.

48. Одредити најмањи $n \in N$ за који је вредност израза $\dfrac{\sqrt{1998} + \sqrt{n}}{\sqrt{1998} - \sqrt{n}}$ природан број.