Домаћи за пету недељу

17. Непрекидност(после граничних вредности функције).

18. Неке значајније граничне вредности

   (а) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

   Фја $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ је парна па је довољно испитати случај $x>0$.
   Нека је $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.
   (AC је тангента на тригонометријску кружницу конструисана у тачки A на оси Ox. Лук $\widehat{AB}=x$, $BB_1=\sin x$, $AC=\tan x$, $\widehat{OAB}$ је кружни исечак.)
   $P_{\triangle OAB}<P_{\widehat{OAB}}<P_{\triangle OAC}$
   $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x\ \Rightarrow\ 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \Rightarrow$
   $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

   Због парности функције следи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

   (б) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e}$

   Користимо дефиницију броја e: $\quad e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in N.$
   Нека је $x\geq 1, x\in R$ и нека је $[x]$ цели део од x.

   $[x]\leq x<[x]+1\Rightarrow\frac{1}{[x]+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{[x]}\Rightarrow 1+\frac{1}{[x]+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{[x]}\Rightarrow$
   $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$

   $$\lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{[x]\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=$$
   $$=e\cdot 1=e$$
   $$\lim_{[x]\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{[x]\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{1}=e\cdot 1=e.$$
   Како је $[x]\to+\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$ то можемо закључити да важи
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Ако $x \to -\infty$ уводимо смену $y = -x$ ($x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

(ц) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

Прво ћемо доказати $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$\frac{1}{x} = y \;\Rightarrow\; x\to\infty \Rightarrow y \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

(логаритамска функција је непрекидна и зато можемо изменити редослед функције и лимеса).

(д) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$, $(a>0, a\neq 1)$ спец. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Смена $a^x - 1 = t \;\Rightarrow\; x\to 0 \Rightarrow t\to 0 \;\Rightarrow\; x = \log_a(1+t)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}})} =$$

$$\frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

(е) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha}$, $(\alpha\in R, \alpha\neq 0)$

$$(1+x)^\alpha = e^{\ln(1+x)^\alpha} = e^{\alpha\ln(1+x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+x)}-1}{\alpha\cdot\ln(1+x)} = \alpha$$