

Функције - задаци са такмичења

1. Наћи минимум функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$. За које вредности x се достиже тај минимум? (гр. 2004/05.)
2. Дата је функција $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^n}$, $x \geq 0$. Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције. (опш.2004/05.)
3. Нека је функција $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, дата са $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$, $x \in \mathcal{R}$. Одредити максималну вредност, ако постоји, дате функције. (реп.2004/05.)
4. Нека је функција $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ задата формулом $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције. (опш.2005/06.)
5. Наћи највећу вредност функције $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 9} + \cos 2\pi x$ на интервалу $(0, +\infty)$ (опш.2005/06.)
6. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин
$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases} .$$
 Решити следеће формуле по $x \in \mathcal{R}$:
а) $\psi(x) < x$; б) $\psi(x) + \psi(1 - x) + \psi(\psi(x)) = 2$ (опш.2005/06.)
7. Одредити максималну вредност функције $f(x) = |x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)|$ за $x \in [3, 4]$. (опш.2006/07.)
8. а) Ако су $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ и $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \arctan x$, тада ако за сваки реални број x важи $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \arctan x = 0$, онда је $\alpha = \beta = 0$. Доказати.
б) Да ли важи претходно тврђење ако су $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ и $g : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \arctan x$? (гр.2006/07.)
9. Одредити за које $a, b \in \mathcal{R}$ графици функција $f(x) = a \cdot 2^x + b$ и $g(x) = b \cdot 2^{-x} + a$ имају тачно две заједничке тачке. Одредити те тачке. (опш. 2007/08.)