Задаци са општинских такмичења из прошлог века

1. Одреди цифре x и y тако да број $\overline{1984xy}$ буде дељив са 8 и са 9.
2. Може ли коњ скачући по шаховској табли (по правилима шаховске игре), пошавши са доњег левог поља, да стигне на горње десно поље, а да се при том нађе на сваком пољу табле тачно једанпут?
3. Ако је $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = x^2$, $x \neq 0$, израчунати $f(2)$.
4. Змај има 1985 глава. Витез може једним ударцем мача одсећи: 1, 17, 21 или 33 главе, али при томе змају израсте 10,14, 0 или 48 глава редом. Може ли витез одсећи све змајеве главе?
5. Доказати да се међу 10 узастопних природних бројева увек може наћи један који је узајамно прост са сваким од осталих девет.
6. Доказати да се у свакој групи од 6 људи могу наћи три човека, који се међусобом не познају, или пак да свако познаје осталу двојицу.
7. Доказати да је $n^3 + 11n$, $n \in \mathbf{N}$ дељиво са 6.
8. Доказати да се израз $A = (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) + 24$, $x \in \mathbf{Z}$ може представити као производ четири узастопна цела броја.
9. Доказати да је збир кубова три узастопна цела броја дељив са 9.
10. Ако су у шестоцифреном броју прва и четврта цифра једнаке, друга и пета цифра једнаке и трећа и шеста цифра једнаке, доказати да је тај број дељив са 7,11 и 13.
11. Шестоцифрени број почиње цифром 1. Ако се та цифра премести на последње место, добија се број који је три пута већи од полазног. Наћи тај број.
12. Доказати да се број 101010 не може представити у облику разлике квадрата два цела броја.
13. Постоји ли $n \in \mathbf{N}$ тако да је $n^2 + n + 1$ дељив са 125.
14. Нека су a и b цели бројеви такви да је производ $(16a + 17b)(17a + 16b)$ дељив са 11. Доказати да је тада тај производ дељив и са 121.
15. Ако је p прост број већи од 3, доказати да је $p^2 - 1$ дељив са 24.
16. Ако је $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) \neq 0$, доказати да су a, b, c различити међу собом.

17. Нека је $n \in \mathbf{N}$. Доказати да је број $(n+1)(n+2)\cdots 2n$ дељив са 2^n, а није дељив са 2^{n+1}.

18. Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни бројеви, доказати неједнакост
$\dfrac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\ldots(a_n^2+a_n+1)}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \geq 3^n\,.$

19. Нека су $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbf{R}$ и $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$.
Доказати да је
$\left(\dfrac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a_2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a_3}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a_4}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a_5}-1\right) \geq 1024.$

20. Наћи последњу цифру броја $7^{7^{7^{7}}}$.

21. Ако су у троцифреном броју дељивом са 7 две последње цифре једнаке, доказати да је збир цифара тога броја дељив са 7.

22. Ниједан од бројева a, b, c, d и e није дељив са 5. Доказати да је збир четвртих степена ових бројева дељив са 5.

23. Наћи сва целобројна решења једначине $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$.

24. Наћи сва целобројна решења једначине $x^2+2xy-3y^2=1$.

25. Дат је трапез са узајамно нормалним дијагоналама. Ако је P површина тог трапеза, а m његова средња линија, доказати да је $P \leq m^2$.

26. Доказати да се конвексан седамнаестоугао не може разрезати на дванаест четвороуглова чије ни једно теме не може да буде унутрашња тачка странице неког другог четвороугла.

27. У круг је уписан четвороугао $ABCD$ чије се дијагонале AC и BD секу у тачки S под правим углом. Права кроз S, која је нормална на AB, полови страницу CD. Доказати.

28. Нека је у правоуглом троуглу ABC $\angle BCA = 90^\circ$ и D подножје висине из темена C. Ако су полупречници кругова уписаних у троуглове ACD и BCD редом једнаки 3 цм и 4 цм, одредити полупречник круга уписаног у троугао ABC.

29. Компланарне тачке A, B, C, D су такве да не постоје три које су колинеарне. Доказати да троуглови ABC, ABD, ACD и BCD не могу бити сви оштроугли.

30. У правоуглом троуглу $ABC(\angle ACB = 90^\circ)$, CD је висина. Ако је N средиште CD и M средиште BD, доказати да је $AN \perp MC$.

31. Ако је M тачка у троуглу ABC, доказати да је $AM+MB < AC+CB$.

32. Дат је правоугаоник $ABCD$ у коме је $AB > BC$. Тачка B_1 је симетрична тачки B у односу на праву AC, а E је пресек правих AB_1 и CD. Доказати да су троуглови ADE и CB_1E подударни.