Задаци са општинских такмичења - Србија *

1. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5?

2. Доказати да једначина $x^2 - 10y^2 - 2x - 10y - 2 = 0$ нема целобројних решења.

3. У равни је дато 17 правих, од којих је 6 међусобно паралелно, а од осталих 11 никоје две нису паралелне, нити су паралелне са првих 6 правих. Одредити број троуглова чије странице леже на датим правама.

4. Доказати да број $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{8}$ није рационалан.

5. Колико има пресликавања F из скупа $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ у скуп $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ са особинама: $F(a) \geq 4$, $F(c) \leq 4$ и $F(e) = 4$? Колико је међу њима $1-1$ пресликавања.

6. У једном одељењу има 30 ученика. На такмичењу из математике учествује њих 24, на такмичењу из физике 22 и на такмичењу из информатике 20 ученика. Доказати да бар 6 ученика учествује на сва три такмичења.

7. Дата је функција $f : R \to R$. За свако $x \in R$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ важи: $f(\frac{x}{x-1}) - 2f(\frac{x-1}{x}) = 2002x$. Израчунати $f(2)$.

8. Ако је n непаран цео број, доказати да је $n(n^{2002} - 1)$ дељиво са 24.

9. Колико има парова троцифрених бројева чији је производ написан само цифрама 3.

10. На рукометном турниру, свака екипа је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. За победу се добија 2 поена, за пораз 0, а за нерешен резултат свака екипа добија по 1 поен. Три првопласиране екипе имале су 7 , 5 и 3 поена. Колико је на турниру учествовало екипа, и колико је поена имала последњепласирана од њих? (Ако две екипе имају једнак број поена, место се одређује на основу разлике броја датих и примљених голова.)

11. Испитати када израз $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$, $n \in N$ није дељив са 18.

12. Растојање између села A и B је $3\,km$. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу , тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

*2000/01. до 2004/05.

13. Бува са налази у координатној равни. Из тачке (m, n) бува може да скочи у једну од тачака $(n, m), (m-n, n)$ или $(m+n, n)$. Да ли бува може да дође у тачку $(12, 32)$ ако се у почетку налази у тачки
а)$(7, 32)$; б) $(8, 12)$?

14. Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкова Плинкови. Који искази морају бити тачни:
а) Неки Планкови су Плонкови."
б) Неки Плинкови нису Плонкови".
в) Ниједан Плонк није Планк".

15. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

16. Цифре a и b су различите и такве да важи $\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{aba} = \overline{abaaba}$. Дешифровати ову једнакост.

17. У троуглу $\triangle ABC$ ($BC > CA$) је $\angle CAB - \angle ABC = 45^\circ$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, израчунати величину угла $\angle BAD$.

18. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.

19. Колико има једнакокраких троуглова , чије су странице целобројне, а обим једнак $30\,cm$?

20. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

21. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

22. Наћи све просте бројеве p, q, r, као и све природне бројеве n, такве да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$.

23. Наћи троцифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрени број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.

24. Колико има дијагонала конвексног 15-тоугла које спајају по два његова темена између којих се (посматрано у оба могућа смера) налазе бар три друга темена?

25. Висина AD из темена A троугла $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $BD : DC = 3 : 1$. Ако је $\angle ABC = 30^\circ$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ правоугли.