Задаци са градских такмичења из прошлог века

1. а) Доказати да разлика једног троцифреног броја и броја који је написан истим цифрама, али у обрнутом поретку, не може бити квадрат природног броја.
   б) Наћи услов при коме разлика једног двоцифреног броја и броја који је написан истим цифрама, али у обрнутом поретку, представља квадрат природног броја.

2. Ако су x, y, z цели бројеви, такви да је $x+y+z=0$, доказати да је број $x^3+y^3+z^3$ дељив са 3.

3. Наћи све $a \in \mathbf{Z}$, тако да израз $(a^3+1):(a-1)$ буде такође цео број.

4. Доказати да број n^2+n+2 није дељив са 49 ни за један природан број.

5. Квадрат целог броја завршава се са две једнаке цифре. Које то цифре могу да буду?

6. Доказати да је за сваки $k \in \mathbf{N}$, број $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ дељив са 11.

7. Ученик је у току 19 дана решио 73 задатка. Сваког од првих 11 дана решио је по x задатака, а сваког од преосталих дана по y задатака. Наћи x и y.

8. Одредити $n \in \mathbf{N}$ за које је број $3(n^2+n)+7$ дељив са 5.

9. Од пет узастопних непарних бројева постоји један који није дељив ни са 3 ни са 5 ни са 7. Доказати.

10. Ако су a и b природни бројеви који нису дељиви са 3, тада је разлика a^6-b^6 дељива са 9.

11. Разлика четвртих степена два броја од којих први при дељењу са 5 даје остатак 1, а други при дељењу са 5 даје остатак 2 дељива је са 5. Доказати.

12. Доказати да је константна вредност израза
    $$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)},$$
    за произвољне a, b, c и $a \neq b \neq c \neq 0$.

13. Да ли важи $\dfrac{a^2}{2a^2-b(a+b)}+\dfrac{b^2}{2b^2-a(a+b)}+\dfrac{(a+b)^2}{2(a+b)^2+ab}=1$, ако је $a-b \neq 0$, $2a+b \neq 0$, $2b+a \neq 0$?

14. Нацртати график функције $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

15. За које вредности a и b је $a^2 - a\sqrt{2} + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2} = 0$

16. За које вредности x и y важи $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.

17. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ праве p, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ тачке праве q, такве да је $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$, $n > 3$. Доказати да средишта дужи $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ припадају једној правој.

18. Над страницама троугла ABC конструисани су произвољни паралелограми ABB_1A_1, BCC_1B_2, ACC_2A_2. Може ли се од дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 конструисати троугао?

19. Дат је троугао $ABC(\angle ACB = 90°)$. Над његовим катетама конструисани су квадрати $ADKC$ и $CBHE$. Доказати да је збир одстојања тачака D и H од праве AB једнак дужини хипотенузе AB.

20. У троуглу ABC је $\gamma - \alpha = 60°$, BD је симетрала угла код B, $D \in AC$ и BE је висина ($E \in AC$). Израчунати DE ако је $BD = 10$.

21. Конструисати $\triangle ABC$ ако су дате две странице $AC = b$, $AB = c$, знајући да је угао код темена A два пута већи од угла код темена B.

22. У оштроуглом троуглу AFE висине ED и FB секу се у C. Тачке M, N, P и Q су, редом средишта дужи FC, EC, AE и AF. Доказати да је четвороугао $MQPN$ правоугаоник.

23. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB троугла ABC и D подножје висине из A. Доказати да је угао DC_1A_1 једнак углу DB_1A_1 односно углу $\angle B - \angle C$, ако је $AC > AB$.

24. Дато је n тачака равни, међу којима не постоје 3 колинеарне. Површина ма ког троугла чија су темена дате тачке није већа од 1. Доказати да постоји троугао површине 4 који садржи све дате тачке (тачке датог скупа могу припадати страницама траженог троугла).

25. Све дијагонале и странице неког седамнаестоугла су обојене, неке плавом, неке белом, а неке црвеном бојом. Доказати да међу страницама и дијагоналама постоје три истобојне дужи које су странице неког троугла.

26. У конвексном четвороуглу $ABCD$ M и N су средишта страница AD и BC, а E је средиште дужи MN. Доказати да тачка E и средишта дијагонала AC и BD припадају једној правој.

27. Нека су наспрамне странице AD и BC четвороугла једнаке и нека су M и N средишта страница AB и CD. Доказати да праве AD и BC образују са правом MN једнаке углове.

28. Дат је паралелограм $ABCD$ у коме су A_1, B_1, C_1, D_1 редом средишта страница BC, CD, DA, AB. Нека праве DD_1 и BB_1 секу праву AA_1 у тачкама M и N. Доказати да је $MN = \frac{2}{5}AA_1$.

29. У троуглу ABC симетрала угла код темена A сече BC у D. Кроз D је конструисана права до пресека са AB у тачки E, тако да је угао BDE једнак углу BAC. Доказати да је $CD = DE$.

30. Постоји ли затворена изломљена линија која сече сваку своју дуж тачно једанпут, а састоји се од : а) шест дужи; б) седам дужи?

31. Угао при врху једнакокраког троугла је $108°$. Доказати да је висина троугла која одговара његовој основици једнака половини симетрале угла на основици (дужина симетрале се рачуна од темена до пресека са наспрамном страницом).