Алгебарски разломци *

1. Нека су $x, y, z \in \mathbf{R}$, такви да је $x+y+z=xyz$. Доказати да важи идентитет: $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

2. Одредити све $x \in \mathbf{Z}$ за које је $\dfrac{x^3+3x^2-x-10}{x+2} \in \mathbf{N}$.

3. Одредити све тројке целих бројева (a, b, c), таквих да је $NZD(b, c)=1$ и $\sqrt{a+\dfrac{b}{c}}=a\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

4. Раставите на чиниоце израз: $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$

5. Доказати да за реалне бројеве $a \neq b \neq c \neq a$ важи следећи идентитет $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$.

6. Доказати да не постоје реални бројеви a, b, c за које важи $a+b+c=63 \quad$ и $\quad ab+bc+ca=1996$.

7. Ако су a, b, c реални бројеви, такви да је $a \neq b \neq c \neq a$, доказати да је $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$.

8. Ако је $a+b=1$ и $ab \neq 0$, доказати $\quad \dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

9. Ако су $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, такви да је $xyz=1$, доказати да је вредност израза $\dfrac{x+1}{xy+x+1}+\dfrac{y+1}{yz+y+1}+\dfrac{z+1}{zx+z+1}$ константна.

10. Нека су a, b и c међусобно различити реални бројеви, од којих ниједан није једнак нули, и за које је $a+b+c=0$. Доказати да важи:
    а) $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$;
    б) $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}\right)=9$.

11. Ако за реалне бројеве a, b, c важи: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$, доказати да је $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=1$.

*Задаци са општинских такмичења у Хрватској за први разред

12. Ако су $a, b, c \in \mathbf{R}$ ($a+b \neq 0,\ b+c \neq 0,\ a+c \neq 0$), доказати да израз:
$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \cdot \left(1+\frac{a}{b+c}\right) \cdot \left(1+\frac{b}{a+c}\right) - \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
не зависи од a, b и c.

13. Доказати да из једнакости $a^3+b^3+c^3 = a^2+b^2+c^2 = a+b+c = 1$ следи $abc = 0$.