Градска такмичења у Хрватској, 1992 – 2006

1. Шта се може закључити о бројевима a^2, b^2, c^2 ако важи једнакост $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{2}{a+c}$?

2. Показати да се разломак $\dfrac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ не може скратити ни за који $n \in \mathbf{N}$.

3. Бројеви a, b, c су такви да је:
$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)} = \frac{b^2-ac}{b(1-ac)},\ abc(1-bc)(1-ac) \neq 0.$$
Ако је $a \neq b$ доказати да је $a+b+c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

4. Нека су x, y, z квадрати природних бројева. Одредити све уређене тројке (x, y, z) за које важи: $x - y = y - z = 96$.

5. За коју вредност реалног параметра a једначина $|3 - 2|x|| = -\frac{3}{4}a$ има тачно три решења?

6. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да тада важи неједнакост:
$$\frac{2}{b+c-a} + \frac{2}{c+a-b} + \frac{2}{a+b-c} > \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}.$$

7. За које вредности параметра $p \in \mathbf{R}$ једначина
$$\frac{5x}{5x^2+px+45} + \frac{x+10}{x^2+5x} = \frac{2}{x}$$
нема ниједно решење?

8. Ако је $x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}$, одредити $x^3+y^3+z^3$.

9. Да ли је могуће распоредити цифре $0, 1, \ldots, 9$ у круг тако да збир свака три узастопна броја буде највише: а) 13; б) 14; в) 15?

10. Нека су a, b, c, d, e, f међусобно различити цели бројеви. Доказати да је:
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-a)^2 \geq 18.$$

11. Колика је површина скупа тачака чије координате у Декартовом координатном систему задовољавају неједнакост $|x| + |y| + |x + y| \le 2$?

12. Одредити цифре $a \neq 0$, b, c и d тако да разломак $\dfrac{a}{b+c+d}$ има децимални запис $0.abc$.

13. Реални бројеви a и b задовољавају следеће једнакости:

$$a^3 - 3ab^2 = 44, \quad b^3 - 3a^2b = 8.$$

Колико је $a^2 + b^2$?

14. Ако је $x + y + z = 0$, поједноставити израз $\dfrac{x^7 + y^7 + z^7}{xyz(x^4 + y^4 + z^4)}$.

15. Постоји ли цео број x за који су оба броја $\dfrac{14x+5}{9}$ и $\dfrac{17x-5}{12}$ цела?

16. Нека је a реалан број такав да је $a^5 - a^3 + a = 2$. Доказати да важе неједнакости $3 < a^6 < 4$.

17. Дата је једначина $4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$. Пронаћи сва њена целобројна решења.

18. Пронаћи све природне бројеве са најмање три цифре у којима сваке две узастопне цифре чине квадрат природног броја.

19. Доказати да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити потпуни квадрат.

20. Ако је $a > 0$ одредити најмању вредност ф-је $f(x) = x^5 + \dfrac{a}{x}$ за $x > 0$.

21. Дата је једначина $4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1$. Одредити све тројке реалних бројева (x, y, z) за које дата једначина важи.

22. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви такви да важи $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, доказати неједнакост $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 8$.

23. Доказати да је:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}.$$

24. Одредити све целе бројеве n за које је $\dfrac{5n-23}{n-7}$ цео број.

25. Ако за реалне бројеве x, y важи $x^2 + xy + y^2 = 4$ и $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$, доказати да је $x^6 + x^3y^3 + y^6$ природан број и одредити га.

26. Нека је $A \in \mathbf{N}$ са парним бројем n цифара, а B број добијен било којом променом распореда цифара броја A, тако да важи $A + B = 10^n$.
а) Одредити бар један пар бројева A и B који задовољавају горње својство за $n = 4$.
б) Доказати да је за сваки парни број n сваки од бројева A и B са горњим својством дељив са 10.

27. Одредити све целе бројеве n за које је $\dfrac{5n-23}{n-7}$ цео број.

28. Решити неједначину $x^3-3x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}\geq 0$.

29. Наћи цифру јединице производа $(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)\ldots(8^{2006}-5^{2006})$.