Задаци са такмичења у Хрватској

1. Упростити израз
$$\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}.$$

2. Решити једначину $||x+2|-2x| = \dfrac{x+3}{2}$.

3. Нека је p прост број већи од 3. Доказати да је остатак при дељењу броја p бројем 24 једнак 1.

4. Испитати да ли постоји правоугли троугао чије су дужине катета цели бројеви и чија је дужина хипотенузе $\sqrt{2006}$.

5. Дужине страница троугла ABC су $|BC| = 7$, $|AC| = 3$, а угао $\angle BAC$ је 30°. Одредити дужину странице $\overline{AB}$.

6. Доказати да за међусобно различите реалне бројеве a, b и c важи
$$\frac{a-b}{2(c-a)(c-b)}+\frac{b-c}{2(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{2(b-a)(b-c)}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}.$$

7. Ученик би требало да помножи број 78 двоцифреним бројем чија је цифра десетица 3 пута већа од цифре једниница. Грешком је заменио цифре јединице и десетице тог броја, па је израчунао производ који је за 2808 мањи од правог. Одредити стварни производ.

8. Бројеви 5777 и 8924 подељени истим природним бројем n дају остатке 20 и 36, редом. Одредити број n.

9. Одредити сва целобројна решења једначине $x^2+11^2=y^2$.

10. У кругу са центром у тачки S, полупречника $r = 2\,\mathrm{cm}$, повучена су два полупречника, $\overline{SA}$ и $\overline{SB}$, тако да је угао између њих 45°. Нека је K пресек праве AB и нормале повучене на праву AS у тачки S, и нека је тачка L подножје висине троугла ABS повучене из темена B. Одредити површину трапеза $SKBL$.

11. Нека је $a, b, c \in \mathbb{R}$. Одредити x, y, z ако је
$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

12. Ако су a и b позитивни реални бројеви такви да је $a > b$ и $ab = 1$, доказати да важи неједнакост

$$\frac{a-b}{a^2+b^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ако важи једнакост, одредити $a+b$.

13. Дијагонале правоугаоника, чије се дужине страница односе као $12:5$, деле правоугаоник на четири троугла. У два троугла која имају заједничку страницу, уписане су кружнице полупречника r_1 и r_2. Одредити однос $r_1 : r_2$.

14. Одредити природне бројеве x, y и z, ако важи да је

$$\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}.$$

15. Наћи четвороцифрени број који је четири пута мањи од четвороцифреног броја са истим цифрама у обрнутом поретку.

16. а) Решити једначину $|3x-2| + |3x+2| = 5$.

б) Израчунати површину лика ограниченог правом $y = 5$ и графиком функције

$$y = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + \sqrt{9x^2 + 12x + 4}.$$

17. Унутар троугла ABC, $\angle ABC = 45°$, одређена је тачка D тако да је $\angle DAB = \angle DCB = 45°$. Доказати да је права BD нормална на страницу AC.

18. Упростити израз

$$(x^2+2x)^4 - (x^3+2x^2)^2 - (3x^2+6x)^2 + 9x^2.$$

19. Над страницама једнакокраког правоуглог троугла ABC, са катетом дужине a, нацртани су са спољне стране квадрати $ABLK$, $BCNM$ и $CAQP$. Наћи обим и површину шестоугла $KLMNPQ$.

20. Дужине свих ивица и дужина просторне дијагонале квадра су природни бројеви. Ако су дужине две странице тог квадра 9 и 12, одредити дужину треће странице.

21. Магични квадрат је табела димензија $n \times n$ у коју су уписани сви природни бројеви од 1 до n^2, на такав начин да у свакој врсти, у свакој колони и на обе дијагонале збир уписаних бројева буде једнак истом броју S_n. Одредити збир S_n у магичном квадрату $n \times n$.

22. Наћи све природне бројеве чија је прва цифра 6 и који имају својство да се уклањањем те прве цифре формира број који је 25 пута мањи од почетног. Доказати да не постоји природан број n са својством да се уклањањем његове прве цифре формира број 35 пута мањи од n.

23. Ако је
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad a+b+c=1 \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2=1,$$
доказати да је $xy+yz+zx=0$.

24. Дате су три међусобно различите цифре, различите од 0, и одређена је сума свих троцифрених бројева који садрже те цифре. Доказати да је добијена сума дељива са 37 и са 6.

25. Мерни број запремине праве правилне призме чије су странице природни бројеви једнак је мерном броју њене површине. Одредити дужине страница те призме тако да њена запремина буде: а) најмања могућа; б) највећа могућа.

26. Над страницама једнакостраничног троугла ABC ивице a конструисани су са спољне стране квадрати $ABLK$, $BCNM$ и $CAQP$. Одредити обим и површину шестоугла $KLMNPQ$.

27. За разне вредности реалног параметра a испитати решивост једначине
$$\frac{(6a+1)x}{a}+\frac{6a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{(2a+1)x}{a^3+2a^2+a}$$

28. Доказати да за сваки реални број x, $x>-1$, важи неједнакост
$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5}\leq 2.$$

29. Доказати да је за сваки природан број n израз $n^{19}-n^7$ дељив са 30.

30. Тежишна дуж и висина из темена A троугла ABC деле угао код темена A на три једнака дела. Одредити углове тог троугла.

31. Дужина хипотенузе $\overline{AB}$ правоуглог троугла ABC је 6. У тај троугао је уписан квадрат тако да се два темена квадрата налазе на хипотенузи, а друга два на катетама. Доказати да површина квадрата није већа од 4. Испитати за какав троугао би та површина била једнака 4.

32. Доказати једнакост
$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a).$$

33. Одредити цифре a и b тако да број $\overline{2a0b82}$ буде дељив са 13.

34. Ако је дужина тежишне дужи из темена C троугла ABC једнака половини дужине странице $\overline{AB}$, доказати да је тај троугао правоугли.

35. Подножје висине из темена D ромба $ABCD$, $0<\angle BAD<90^\circ$, дели страницу $\overline{AB}$ на две дужи, дужина x и y. Изразити дужине дијагонала ромба помоћу x и y.

36. Скратити разломак $\dfrac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)}$.

37. Ако се двоцифреном броју са леве стране допише цифра 3, формира се број чија је двострука вредности 27 пута већа од датог двоцифреног броја. Одредити тај број.

38. Одредити највећи цео број n за који важи неједнакост

$$3\left(n - \frac{5}{3}\right) - 2(4n+1) > 6n+5.$$

39. Колико делилаца има број 288?

40. Трапез $ABCD$ има прав угао при темену B, а дијгонала $\overline{BD}$ је нормална на крак AD. Дужина крака $\overline{BC}$ је 5 cm, а дужина дијагонале $\overline{BD}$ је 13 cm. Израчунати површину трапеза $ABCD$.

41. Један гост је покуцао на врата и ушао на прославу Аниног рођендана. Следећи пут када је неко покуцао на врата, у питању су била три госта, а сваки следећи пут још два госта више него претходни пут. Ако је на врата покуцано n пута, колико је укупно гостију дошло на рођендан?

42. Одредити све природне бројеве n за које је $n^2 - 440$ потпуни квадрат.

43. У скупу природних бројева решити неједначину

$$\frac{x+2}{x-3} \leq 1.$$

44. Одредити све парове природних бројева (a, b) такве да је $a + b = 378$ и да је 63 највећи заједнички делилац бројева a и b.

45. Одредити вредности реалног параметра m за које једначина

$$3x + 9 = m(m - x)$$

има јединствено решење.

46. На дијагонали $\overline{AC}$ квадрата $ABCD$, одабрана је тачка T тако да је

$$|TC| = \frac{1}{4}|AC|.$$

Права која садржи тачке B и T сече страницу $\overline{CD}$ у тачки P. Ако је ивица квадрата 6, одредити дужину $|PC|$.

47. Паралелограм $ABCD$ може да се подели на четири једнакостранична троугла ивице 2. Одредити дужину друге дијагонале паралелограма.

48. Ако је $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, одредити $(a + 2b - 3c)^{2009}$.

49. Пас је ступио у потеру за зецом који се налази на дужини од 90 зечијих скокова испред пса. За време за које зец скочи 6 пута, пас скочи 5 пута, но дужина два пасја скока одговара дужини три зечија скока. Одредити колико ће пута зец скочити пре него што га пас сустигне.

50. Нека је $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a < b$ и $x \neq y$, и нека су дати изрази A, B и C:

$$A = \left[\left(a + \frac{z - xy}{x - y}\right) \cdot \left(a - \frac{z - xy}{x - y}\right) + \left(\frac{z - xy}{x - y}\right)^2\right] : b^2,$$

$$B = \left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2}\right) \cdot (a+b),$$

$$C = \frac{a}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \frac{2}{a}}{a + \frac{1}{a}}.$$

Поређати по величини дате изразе.

51. За закуп школског аутобуса који ће превозити децу из насеља A, B, C и D потребно је 1 050 000 динара. Мештани су одлучили да поделе трошкове сразмерно величини њихових насеља. Насеље D има становника колико имају насеља A и C заједно. Насеље A има 25% мање становника него насеље B, а 20% више становника него насеље C. Одредити на који начин су подељени трошкови.

52. Одредити површину једнакокраког трапеза чија је средња линија m и чије су дијагонале међусобно нормалне.

53. Доказати да за све $x, y > 0$ важи неједнакост

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

54. Да ли једначина $x^2 + y^2 - 8z = 14$ има целобројних решења? Ако има, одредити их, а ако нема, доказати да их нема.

55. Марко је нацртао правоугаоник димензија 20×15 и поделио га на јединичне квадрате. Колико укупно квадрата има на тој слици?

56. Одредити непознате цифре a, b, c и d тако да важи

$$\overline{a3bc} \cdot 45 = \overline{37d15b}.$$

57. Решити у скупу реалних бројева једначину

$$|x+3| + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7.$$

58. Дужине катета правоуглог троугла су 8 и 6. Унутар троугла дата је тачка T, која је од краће катете удаљена за 1, а од дуже 2. Одредити удаљеност тачке T од хипотенузе. Одредити дужину висине на хипотенузу.

59. Ако је $a + b = 1$, доказати једнакост

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}.$$

60. Разлика два непарна броја је дељива са 5. Одредити цифру којом се завршава разлика кубова тих бројева.