# Решења задатака са градских такмичења из прошлог века

1. а) Нека су дати бројеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$. Њихова разлика једнака је $99a - 99c = 3^2 \cdot 11 \cdot (a - c)$. Како је $a - c \neq 11$ то $11 \cdot (a - c)$ не може бити потпун квадрат, па ни разлика бројева $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ није потпуни квадрат;
   б) $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$. Ова разлика је потпуни квадрат акко је $a - b = 1$ или $a - b = 4$ или $a - b = 9$.

2. $x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + (-x - y)^3 = -3xy(x + y)$ је број дељив са 3.

3. $\dfrac{a^3+1}{a-1} = \dfrac{a^3-1+2}{a-1} = a^2 + a + 1 + \dfrac{2}{a-1}$. Да би количник био цео број мора да важи $a - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Решење је $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

4. $n^2 + n + 2 = \frac{1}{4}(4n^2 + 4n + 8) = \frac{1}{4}(4n^2 + 4n + 1 + 7) = \frac{1}{4}[(2n + 1)^2 + 7]$. Да би цео израз био дељив са 49 мора да буде дељив са 7. Стога и $(2n + 1)^2$ мора бити дељив са 7. Ако је квадрат неког броја дељив са 7, онда и тај број мора бити дељив са 7, па је $(2n + 1)^2$ дељиво са 49. Но тада $(2n + 1)^2 + 7$ није дељив са 49, па ни израз $\frac{1}{4}[(2n + 1)^2 + 7]$ није дељив са 49.

5. Квадрат целог броја мора завршавати једном од цифара: $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Бројеви 0 и 4 испуњавају услове задатка јер $10^2 = 100$ и $12^2 = 144$. Остали бројеви не. Ако се квадрат броја завршава цифром 5, онда је тај број облика $10k + 5$. У том случају $(10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$ па се квадрат таквог броја мора завршавати са 25. Ако се квадрат броја завршава цифром 1, онда тај број мора бити облика $10k + 1$ или $10k + 9$. $(10k + 1)^2 = 100k^2 + 20k + 1$ има цифру десетица која је парна па се тај број не може завршавати бројем 11.
   $(10k + 9)^2 = 100k^2 + 180k + 81$ има парну цифру десетица.
   $(10k + 3)^2 = 100k^2 + 60k + 9$ се завршава цифром 9, а цифра десетица је парна.
   $(10k + 7)^2 = 100k^2 + 140k + 49$ се завршава цифром 9, а цифра десетица је парна.
   $(10k + 8)^2 = 100k^2 + 160k + 64$ се завршава цифром 4, а цифра десетица је $6k + 6$ и не може бити једнака 4.
   $(10k + 6)^2 = 100k^2 + 120k + 36$ се завршава цифром 6, а цифра десетица је непаран број.
   $(10k + 4)^2 = 100k^2 + 80k + 16$ се завршава цифром 6, а цифра десетица је непаран број.

6. $5 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow \quad 5^2 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow \quad 5^3 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow$
$5^4 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow \quad 5^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \quad 5^{5k} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$
$5^{5k+1} \equiv 5 \pmod{11}$.
Аналогно је $4^{5k+2} \equiv 5 \pmod{11}$ и $3^{5k} \equiv 1 \pmod{11}$ тј
$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k} \equiv 0 \pmod{11}$.

7. Ученик је 11 дана радио по $x$ задатака а 8 дана по $y$ задатака па је $11x + 8y = 73$. Како је $8y$ паран број а збир непаран, то $x$ мора бити непаран и могуће вредности за $x$ су 1,3,5. Решење је $x = 3$ и $y = 5$.

8. Ако је $3(n^2+n)+7$ дељиво са 5, онда $3(n^2+n)$ мора да даје остатак 3 при дељењу са 5, па $n(n+1)$ мора да даје остатак 1 при дељењу са 5 тј. $n$ мора да даје остатак 2 при дељењу са 5. За бројеве облика $5k+2$ биће израз $3(n^2+n)+7$ дељив са 5.

9. Највећи и најмањи број разликују се за 8, па заједнички делиоци тих пет бројева могу бити само 3,5 и 7. Међу овим бројевима највише 2 су дељива са 3, тачно један је дељив са 5 и највише један дељив са 7. То значи да можемо да уклонимо највише четири броја и остаје нам један који је узајамно прост са остала четири непарна броја.

10. $a = 3k \pm 1$ и $b = 3l \pm 1$. $a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3k(3k \pm 2) + 1 = 3m + 1 \Rightarrow$
$a^6 = (3m+1)^3 = 27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 = 9M + 1$.
Аналогно је и $b^6 = 9L + 1$. Стога је $a^6 - b^6 = 9(M - L)$.

11. $a^4 - b^4 = (5k+1)^4 - (5l+2)^4 =$
$(5k+1+5l+2)(5k+1-5l-2)[(5k+1)^2 + (5l+2)^2] =$
$(5k+5l+3)(5k-5l-1)(25k^2+10k+25l^2+20l+5) =$
$5(5k+5l+3)(5k-5l-1)(5k^2+2k+5l^2+4l+1)$.

12. $$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)} =$$
$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{(b-1)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(a-c)(b-c)} =$$
$$\frac{(a-1)^2(b-c) - (b-1)^2(a-c) + (c-1)^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$
$$\frac{(a-1)^2(b-c) - (b-1)^2(a-b+b-c) + (c-1)^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$
$$\frac{(b-c)[(a-1)^2 - (b-1)^2] - (a-b)[(b-1)^2 - (c-1)^2]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$
$$\frac{(b-c)(a+b-2)(a-b) - (a-b)(b-c)(b+c-2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$
$$\frac{(b-c)(a-b)(a+b-2-b-c+2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.$$

13. $$\frac{a^2}{2a^2-ab-b^2} + \frac{b^2}{2b^2-ab-a^2} + \frac{(a+b)^2}{2a^2+5ab+2b^2} =$$
$$\frac{a^2}{(a-b)(2a+b)} - \frac{b^2}{(a-b)(a+2b)} + \frac{(a+b)^2}{(2a+b)(a+2b)} =$$

$$\frac{a^2(a+2b)-b^2(2a+b)+(a+b)^2(a-b)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=$$
$$\frac{a^2(a+b)+a^2b-b^2(a+b)-ab^2+(a+b)^2(a-b)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=$$
$$\frac{(a+b)(a^2-b^2+a^2-b^2)+ab(a-b)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=\frac{(a-b)[2(a+b)^2+ab]}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=1.$$

14. $y=|\,x-1\,|-|\,x+3\,|\Rightarrow y=\begin{cases} 4, & x\in(-\infty,-3); \\ -2x-2, & x\in[-3,1); \\ -4, & x\in[1,\infty). \end{cases}$

15. $a^2-a\sqrt{2}+b-2\sqrt{b}+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow a^2-a\sqrt{2}+\frac{1}{2}+b-2\sqrt{b}+1=0 \Leftrightarrow (a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\sqrt{b}-1)^2=0 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge b=1.$

16. $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0 \Leftrightarrow 4x^2+8xy+4y^2+x^2-2x+1+y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow (2x+2y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow x+y=0\wedge x=1\wedge y=-1$

17. Нека је $S_1$ средиште дужи $A_1B_1$, $S_2$ средиште дужи $A_2B_2$, ... , $S_n$ средиште дужи $A_nB_n$. Тада је $\overrightarrow{S_1S_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2})$ и $\overrightarrow{S_2S_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{B_2B_3})$, ... , $\overrightarrow{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{B_{n-1}B_n})$. Како је $A_1A_2/B_1B_2=A_2A_3/B_2B_3$ то је и $A_1A_2/A_2A_3=B_1B_2/B_2B_3=1/k$ тј $\overrightarrow{S_1S_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2})$ и $\overrightarrow{S_2S_3}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2})$ тј. тачке $S_1,S_2,S_3$ су колинеарне. Аналогно докажемо да и остале тачке $S_i$ припадају правој која је одређена тачкама $S_1,S_2,S_3$.

18. Да би се од три дужи могао конструисати троугао довољно је доказати да је збир вектора одређених тим дужима једнак нула вектору.
По конструкцији следи
$\overrightarrow{A_2A_1}=\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}$. Како је $\overrightarrow{A_2A}=-\overrightarrow{CC_2}$, $\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{BB_2}=-\overrightarrow{C_1C}$ то је
$\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$.

19. Нека је $DM$ растојање тачке $D$ од хипотенузе и $HN$ одстојање тачке $H$ од хипотенузе. $\triangle ADM\cong\triangle CAL$, где је $L$ пројекција тачке $C$ на хипотенузу. Одатле закључујемо да је $DM=AL$ јер су то странице наспрам једнаких углова у датим троугловима. $\triangle HBN\cong\triangle BCL$, па је $HN=BL$ тј $AB=AL+LB=DM+HN$.

20. Углови троугла су $\alpha, 120^\circ-2\alpha, 60+\alpha$. У $\triangle CDB$, угао $\angle CDB=60^\circ$ па је $\triangle BED$ правоугли са оштрим углом од $60^\circ$. Стога је $DE=5$.

21. Анализа: Нека је тачка $D\in AB$ тако да је $D-A-B$ и $DA=DC$. $\triangle DAB$ је једнакокрак па је $\angle ADC=\angle ACD=\beta$, јер је $\angle BAC=2\beta$ спољашњи угао $\triangle DAC$. $\triangle DAB$ је једнакокраки јер је $\angle CDB=\angle DBC=\beta$.
Конструкција: Конструишемо полуправу $Dp$ и на њој тачке $B$ и $A$ тако да је $DB=b+c$ и $DA=b$. Затим конструишемо пресек симетрале дужи $BD$ и кружног лука $k(A,b)$. То је тачка $C$. $\triangle ABC$ је тражени троугао.

22. $MN$ је средња дуж $\triangle FEC$ па је $MN = \frac{1}{2}FE$ и $MN \parallel EF$.
$PQ$ је средња дуж $\triangle AFE$ па је $PQ = \frac{1}{2}FE$ и $PQ \parallel EF$.
$MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$. $(\star)$
$MQ$ је средња дуж $\triangle ACF$ па је $MQ = \frac{1}{2}AC$ и $MQ \parallel AC$.
$NP$ је средња дуж $\triangle ACE$ па је $NP = \frac{1}{2}AC$ и $NP \parallel AC$.
$NP \parallel AC$ и $NP = QM$. $(\star\star)$
На основу $(\star)$ и $(\star\star)$ закључујемо да је $MNPQ$ паралелограм, а како је $AC \perp EF$ то је $MNPQ$ правоугаоник.

23. $A_1C_1 \parallel AC$ јер је средња дуж $\triangle ABC$ па је $\angle C_1A_1D = \gamma$. $C_1D$ је хипотенузина тежишна дуж у $\triangle BDA$ и како је $C_1D = BC_1$ то је $\angle C_1DB = \beta$. Спољашњи угао троугла једнак је збиру њему несуседних унутрашњих углова па је $\angle C_1DB = \angle C_1A_1D + \angle A_1C_1D$ тј. $\beta = \gamma + \varphi$, односно $\varphi = \beta - \gamma$. Аналогно је и $\angle DB_1A_1 = \beta - \gamma$.

24. Нека је $\triangle ABC$ троугао највеће површине од свих троуглова које можемо формирати од датих тачака. Нека је $MNP$ троугао коме су $A$, $B$ и $C$ средишта страница. Доказаћемо да се све тачке тог скупа налазе унутар $\triangle MNP$. Ако би се нека тачка тог скупа, нпр $X$ налазила ван $\triangle MNP$, тада би површина бар једног од троуглова $AXB$, $AXC$ или $BXC$ била већа од површине $\triangle ABC$, што је у супротности са претпоставком да је $\triangle ABC$ највеће површине. Како је $P_{\triangle MNP} = 4P_{\triangle ABC}$ то $\triangle MNP$ испуњава услове задатка.

25. Нека је $M$ произвољно теме. Из њега полази 16 дужи и постоји 6 дужи исте боје нпр. црвене. Ако међу дужима одређеним са тих 6 тачака постоји нека црвена дуж, онда тачка $M$ и крајње тачке те дужи одређују црвени троугао. Нека су све дужи одређене са тих шест тачака беле или плаве и нека је $Q$ једна од тих тачака. Из $Q$ полази 5 дужи и међу њима постоје три исте боје нпр беле. Ако је нека од дужи, одређена тим тачкама, бела , онда њене крајње тачке заједно са $Q$ одређују бели троугао. Ако међу њима нема беле, онда оне одређују плави троугао.

26. Нека је $P$ средиште дијагонале $AC$ и $Q$ средиште дијагонале $BD$. $MP$ је средња линија $\triangle ACD$, а $QN$ је средња линија $\triangle BCD$. Стога важи $MP \parallel CD \parallel QN$ и $MP = \frac{1}{2}CD = QN$. Одатле је $\angle PME = \angle ENQ$. Како је и $ME = EN$, то важи $\triangle MPE \cong \triangle ENQ$. На основу подударности тих троуглова следи $\angle PEM = \angle QEN$ тј. тачке $P$, $E$, и $Q$ припадају истој правој.

27. Нека су $P$ и $Q$ тачке такве да је $NP$ паралелно и једнако са $DA$, а $NQ$ паралелно и једнако са $BC$. Четвороуглови $APND$ и $BQNC$ су паралелограми, па је $AP = DN$ и $QB = NC$, а пошто је $N$ средиште дужи $DC$, то је $AP = QB$.
Четвороугао $AQBP$ је паралелограм у коме је $M$ пресек дијагонала (средиште дужи $AB$) па су течке $P$, $M$ и $Q$ колинеарне и још $PM = MQ$.
Сада можемо да утврдимо да су троуглови $PMN$ и $QMN$ подударни ($PQ = NQ$, јер је $AD = BC$; $NM = NM$ и $PM = QM$), па су углови $PNM$ и $QNM$ једнаки. (Једнакост ових углова могли смо доказати и овако: Како је $NP = NQ$, троугао $PQN$ је једнакокраки,

па $MN$ као и тежиша дуж припада симетрали угла наспрам основице, тј. $\angle PNM - \angle QNM$). Нека је $R$ пресек правих $AD$ и $MN$, а $S$ пресек правих $BC$ и $MN$. Углови $PNM$ и $ARM$ једнаки су као сагласни. Из истог разлога једнаки су и углови $QNM$ и $BSM$. Из те две једнакости углова добијамо да су углови $ARM$ и $BSM$ међусобно једнаки.

28. Означимо са $z$ пресек правих $CC_1$ И $BB_1$, а $YA_1$. Пошто је $XD_1$ средња линија троугла $ABY$, средња линија троугла $ZCB$ биће $AX = \frac{1}{2}AY$ и $YA_1 = \frac{1}{2}CZ$. Како су троуглови $AXD_1$ и $CZB_1$ подударни, имамо $YA_1 = \frac{1}{4}AY$. Тако добијамо да је $XY = \frac{2}{5}AA_1$.

29. Нека је $F$ тачка $AC$, таква да је $AF = AE$. Троуглови $ADE$ и $ADF$ су подударни ($AD$ заједничка страница, $AE = AF$ и углови $EAD$ и $FAD$ су једнаки половини угла код $A$, па је $DE = DF$ и углови $EDA$ и $FDA$ су једнаки. Нека је $\angle A = \alpha$ и $\angle FDA = \varphi$. $\angle C = \frac{\alpha}{2} + \varphi$ и $\angle CFD = \frac{\alpha}{2} + \varphi$ то троугао $CFD$ је једнакокраки, па је $DC = DF$. Пошто је $DF = DE$, то је $DC = DE$, што је и требало доказати.

30. а) Постоји.
б) Пошто ова изломљена линија сваку своју дуж сече тачно једанпут, то значи да свака њена страница сече тачно једну страницу. Тако странције које се секу образују парове, па не може постојати оваква изломљена линија која има непаран број страница.

31. Нека је $\angle BAC = 108°$, $AD = s_\alpha$ и $CE = h_c$. Нека је $EF||BC$ и $F \in AD$. $AD \cap CE = L$. У $\triangle LDC$ углови код темена $C$ и $D$ једнаки су $54°$ па је $LD = LC$. У $\triangle FEL$ углови код темена $F$ и $E$ су једнаки ($54°$) па је $LF = LE$ тј. дуж $CE = FD$, а како је $F$ средиште $AD$ то је $AD = 2 \cdot CE$.