Мало занимације за распуст - решења

1. $55440 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Не постоји такав број.

2. $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Сваки такав број садржи цифре 5 и 7 (ако се помноже неким бројем добија се бар двоцифрен број). Производ $2^4 \cdot 3^2$ не може се представити као производ мање од три једноцифрена броја, а најмања цифра је 2 па је $2^4 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2^3 \cdot 9$. Најмањи број има пет цифара и то је 25789.

3. $8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Максималан број цифара је 8. Решење је 75532222.

4. Да би број био дељив са 225 мора бити дељив са 9 и са 25. Како је 225 дељив са 9 то ће и број чији је збир цифара 225 бити дељив са 9. Да би број био дељив са 25 мора се завршавати са 00, 25, 50 или 75. Да би број био што је могуће мањи последње две цифре ће бити 75. Како је $225 - 12 = 213$ и $23 \cdot 9 = 207$ то ће преостале цифра бити 6. Тражени број је 699999999999999999999999975.

5. Нека је један број n и други $30030 - n$. Ако је њихов производ дељив са 30030 и како је $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ то важи $n \cdot (30030 - n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
   Нека је један од чинилаца дељив са 2. Како је и њихов збир дељив са 2, то и други мора бити дељив са 2, али тада производ мора бити дељив са 2^2, што је немогуће. Такви бројеви не постоје.

6. Нека је $n = 10k + l$. Тада је $n^2 = 100k^2 + 20k\,l + l^2$. Цифра десетица броја n^2 се добија сабирањем десетица броја l^2 и десетица броја $20k\,l$. Цифра десетица броја $20k\,l$ је парна, па су цифре десетица бројева n^2 и l^2 исте парности. Број l^2 је једноцифрен или двоцифрен, ако је једноцифрен, сматрамо да је цифра десетица једнака 0. Ако је цифра десетица броја n^2 непарна, онда је и цифра десетица броја l^2 непарна, а једини такви квадрати су 16 и 36. Према томе, последња цифра броја n^2 је 6.

7. Ако последња цифра броја n није девет, онда се збирови цифара бројева n и $n + 1$ разликују за 1. Стога, последња цифра броја n мора бити 9. Додавањем јединице броју n мењају се све деветке на крају броја у нуле, а последња цифра различита од 9 повећава се за 1. Да би бројеви n и $n + 1$ задовољавали тражени услов, збир цифара испред крајњих мора бити једнак 1989, а збир крајњих деветки мора бити број облика $1990k + 1$, за што је могуће мањи природан број k. Нека је број тих деветки s. Тај број добијамо као најмањи број s за који је: $1990k + 1 = 9s$. Добија се $s = \dfrac{1990k + 1}{9} = 220k + \dfrac{k + 1}{9}$. Најмање k

за које је s цео број је $k = 8$. Тада је $s = 221 \cdot 8 + 1 = 1769$. Збир цифара испред крајњих деветки је 1989. Најмањи број чија је последња цифра различита од 9, а чији је збир цифара 1989 је број $1\underbrace{99\ldots9}_{220}8$.

Тражени број је $1\underbrace{99\ldots9}_{220}8\underbrace{99\ldots9}_{1769}$ и он има 1991 цифру.

8. У запису апсолутно простог броја не може бити парних цифара. Ако је број цифара једнак или већи од два, тада се не може појављивати ни цифра 5. То значи да се у запису апсолутно простог броја могу јавити само цифре 1,3,7, и 9. Претпоставимо да постоји апсолутно прост број у чијем запису се појављује свака од те четири цифре. Пермутовањем цифара тога броја могу се добити , између осталих , и следећих 7 бројева: $M_1 = M + 1379$, $M_2 = M + 1397$, $M_3 = M + 3179$,
$M_4 = M + 3197, M_5 = M + 7913, M_6 = M + 7139, M_7 = M + 9137$ где је $M = \overline{a_1a_2\ldots a_n0000}$, $a_i \in \{1, 3, 7, 9\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ово је контрадикција, јер бројеви $3197, 1379, 3179, 9137, 7913, 1397$ и 7139 дају различите остатке при дељењу са 7 и зато међу бројевима $M_1, M_2, \ldots, M_7$ бар један је дељив са 7.

9. На основу претходног задатка следи да је тражени број, уколико постоји, мора имати све цифре из скупа $\{1, 3, 7, 9\}$. За сваки избор од по три цифре из тог скупа може се наћи број са тим цифрама који није прост: $371 = 53 \cdot 7$, $319 = 29 \cdot 11$, $791 = 113 \cdot 7$, $793 = 61 \cdot 13$. Тражени број не постоји.

10. Јасно је да међу једноцифреним бројевима не постоји број са наведеном особином јер је x делитељ броја x^3. Не постоји ни двоцифрен број са наведеном особином јер је $x + y$ делитељ броја $x^3 + y^3$ тј. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Тражену особину немају ни троцифрени бројеви чија је бар једна цифра једнака 0, као ни бројеви чије су све цифре једнаке. Први број који не задовољава те услове је 112. Збир цифара тог броја је 4, а збир кубова цифара је 10.

11. Ако се паран број степенује парним бројем, добија се број дељив са 4. Ако се непаран број степенује парним бројем добија се број који при дељењу са 4 даје остатак 1. Од 1996 узастопних бројева половина су парни, а половина непарни. То значи да 998 сабирака посматраног збира дељиво са 4, а исто толико при дељењу са 4 даје остатак 1. То значи да лева страна даје остатак 2 при дељењу са 4 јер 998 при дељењу са 4 даје остатак 2. Но квадрат природног броја при дељењу са 4 даје остатак 0 или 1, што значи да збир степена не може бити квадрат природног броја.

12. Нека је c дужина хипотенузе, a дужина друге катете. Тада по Питагориној теореми важи $c^2 - a^2 = 1991^2$, тј. $(c - a)(c + a) = 11^2 \cdot 181^2$. Како је $c - a < c + a$ постоје следеће могућности:
$c - a = 1 \quad \wedge \quad c + a = 3964081 \qquad c - a = 11 \quad \wedge \quad c + a = 360371$
$c - a = 121 \quad \wedge \quad c + a = 32761 \qquad c - a = 181 \quad \wedge \quad c + a = 21901\,.$
Решења система су, редом
$c = 1982041 \wedge a = 1982040, \quad c = 180191 \wedge a = 180180,$

$c = 16441 \wedge a = 16320 \quad c = 11041 \wedge a = 10860.$
То значи да је минимална дужина хипотенузе 11041.

13. Посматрамо низ од $n+1$ бројева: 1, 11, 111, 1111,..., $\underbrace{111\ldots1}_{n+1}$. У том низу могу се наћи два броја која при дељењу са n дају исти остатак (јер различитих остатака има n, а бројева $n+1$). Ако одредимо разлику та два броја, добијамо број облика $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{s} = \underbrace{11\ldots1}_{k} \cdot 2^s \cdot 5^s$ који је дељив са n. Како број n не садржи просте чиниоце 2 и 5, то важи да је број $N = \underbrace{11\ldots1}_{k}$ дељив са n.

14. $n^2(n^4+n^2-2) = n^2(n^4-n^2+2n^2-2) = n^2[n^2(n^2-1)+2(n^2-1)] =$
$n^2(n^2+2)(n^2-1) = n^2(n-1)(n+1)(n^2-1+3) =$
$(n-1)^2n^2(n+1)^2 + 3n^2(n-1)(n+1)$. Први сабирак је дељив са 36, а други са 18 па је цео збир дељив са 18.

15. $2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{1995}+2^{1996} =$
$(2^1+2^2+2^3+2^4)+(2^5+2^6+2^7+2^8)\ldots+(2^{1993}+2^{1994}+2^{1995}+2^{1996}) =$
$(2^1+2^2+2^3+2^4)+2^4(2^1+2^2+2^3+2^4)+\ldots+2^{1992}(2^1+2^2+2^3+2^4) =$
$30(1+2^4+\ldots+2^{1992}) = 30M$

16. Ако се број n^2+2n+2 завршава са 6, онда се његов претходник $(n+1)^2$ завршава са 5. Како је тај број тачан квадрат, две последње цифре тог броја су 2 и 5. Стога се број n^2+2n+2 завршава са 26, тј цифра десетица је 2.

17. Како треба одредити три последње цифре тражимо степен броја 7 који је близу неког броја са што више нула на крају.
$7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$. Посматрамо израз $7^{4n} = (1+2400)^n = 1 + 2400n + \frac{1}{2}n(n-1)2400^2 + \ldots$. Сви чланови у развоју бинома, почев од трећег, завршавају са бар четири нуле и не утичу на последње три цифре броја 7^{4n}. Три последње цифре су одређене са

$$1 + 2400n = 24n \cdot 100 + 1.$$

За $n = 2500$ број $24n$ завршава се нулом тј. број $7^{4n} = 7^{10000}$ завршава се цифрама 001. Стога можемо писати $7^{10000} = 1000k + 1$, за неки природан број k, односно $7^{10000} = 1000(k-1) + 1001$. Ако поделимо израз са 7 добијамо $7^{9999} = \frac{1000(k-1)}{7} + 143$. Како десна страна мора бити дељива са 7, закључујемо да је $k-1$ дељиво са 7 и за неко $p \in \mathbf{N}$ важи $7^{9999} = 1000p + 143$. Број $1000p$ се завршава са 000 те можемо закључити да су последње три цифре, у запису броја 7^{9999}, 143.

18. Како је $57^4 = 10556001$, то је $57^1986 = 57^2 \cdot 57^{1984} = 57^2 \cdot 57^{4\cdot496} = 3249 \cdot 10556001^{496}$. Нека је $M = 10556$. Тада важи $57^{1984} = (1+1000M)^{496} = 1 + 496 \cdot 1000M + \frac{1}{2} \cdot 496 \cdot 495 \cdot 1000^2M + \ldots$ Сви чланови у развоју бинома, почев од трећег, завршавају се са шест нула и не утичу на последњих шест цифара збира, стога тражених шест цифара налазимо као цифре броја $3249(1+496000M) = 3249 \cdot (1+496000 \cdot 10556) = 3249 \cdot 5235776001 = \ldots 776001 \cdot 3249 = \ldots 227249$.

19. $5^{1997} = 5^{249\cdot 8+5} = 5^5 \cdot [(5^{249})^8 - 1 + 1] =$
$= 5^5 \cdot [(5^{249} - 1)(5^{249} + 1)(5^{498} + 1)(5^{996} + 1) + 1]$
Први чинилац у средњој загради дељив је са 4, а остали са 2. Тада је њихов производ са 5^5 дељив са $5^5 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10^5$, тј. завршава се са пет нула. Стога закључујемо да су последњих пет цифара броја 5^{1997} исте као и броја 5^5, тј. 03125.

20. Сви факторијели за $x \geq 5$ се завршавају цифром 0, а како је $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ то ће се збир $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + x!$ завршавати цифром 3. Квадрат природног броја се може завршавати само цифрама 0,1,4,5,6,9, што значи да задатак за $x \geq 5$ нема решења. Једина решења су $x = 1, y = 1$ и $x = 3, y = 3$.

21. Квадрат природног броја при дељењу са девет даје остатак 0,1,4 или 7 (остатак при дељењу природног броја са 9 је 0,1,2,3,4,5,6,7,8; квадрат природног броја даје остатке 0,1,4,0,7,7,1,4,1), стога збир цифара таквог броја мора бити облика $9k, 9k+1, 9k+4, 9k+7$. Стога 1995 не може бити збир цифара потпуног квадрата јер је облика $9k + 6$. 1996 је облика $9k + 7$ па може бити збир цифара квадрата природног броја.

22. Последња цифра броја n^2 се понавља са периодом 10, а последња цифра броја 2^n се понавља са периодом 4. Стога се последња цифра броја $n^2 + 2^n$ понавља са периодом дужине 20. Једноставно је проверити да последња цифра броја $2^n + n^2$ није 5.

23. Имамо редом:
$2^{4m+2} + a^{4n+4} = 2^{2(2m+1)} + a^{2(2n+2)} =$
$(2^{2m+1} + a^{2n+2})^2 - 2 \cdot 2^{2m+1} \cdot a^{2n+2} = (2^{2m+1} + a^{2n+2})^2 - (2^{m+1} \cdot a^{n+1})^2 =$
$(2^{2m+1} + a^{2n+2} - 2^{m+1} \cdot a^{n+1}) \cdot (2^{2m+1} + a^{2n+2} + 2^{m+1} \cdot a^{n+1}),$
што је очигледно сложен број.

24. С обзиром да је $n^2 - n + 3 = n^2 - n - 30 + 33 = (n-6)[(n-6)+11] + 3 \cdot 11$, разликоваћемо два случаја: (1) $11|(n-6)$; (2) $11 \nmid (n-6)$.
Ако је $n - 6$ дељиво са 11, тада је $(n-6)[(n-6)+11]$ дељиво са 121, а то значи да $(n-6)[(n-6)+11] + 3 \cdot 11$ није дељиво са 121.
Ако $n - 6$ није дељиво са 11, онда ни $(n-6)[(n-6)+11]$ није дељиво са 11, а самим тим ни $(n-6)[(n-6)+11] + 3 \cdot 11$.
Дакле, дати израз није дељив са 121 ни за један природан број n.

25. Број $1993x + 1993y$ дељив је са 1993, па је разлика $997(2x + 9y) - (1993x + 1993y) = (x + 1001y) + (1993 \cdot 3y)$ дељива са 1993. То је могуће само ако је $x + 1001y$ дељиво са 1993.

26. С обзиром да је $N = 4m + a = 5n + b = 7p + c$ (m, n, p - природни бројеви), то је $a = N - 4m, b = N - 5n$ и $c = N - 7p$, па је
$105a + 56b + 120c - N = 105(N - 4m) + 56(N - 5n) + 120(N - 7p) - N =$
$280N - (420m + 280n + 840p) = 140(2N - 3m - 2p - 6p).$

27. Како је $127^{68} < 128^{68} = (2^7)^{68} = 2^{247} < 2^{477} = (2^9)^{53} = 512^{53} < 513^{53}$, излази $513^{53} > 127^{68}$.

28. (а) Како је $2 > \sqrt{3}$, имамо $8 > 4\sqrt{3}$, тј. $16 > (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$ или $4^2 > (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$, одакле је $4 > \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Последња неједнакост еквивалентна са $6 - \sqrt{6} > 2 + \sqrt{2}$.

29. Дату једначину напишимо у облику $(3+x)y = x^2 + 2x - 1992$, тј. као

$$y = \frac{x^2+2x-1992}{x+3} = \frac{x^2+2x-3-1989}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3)-1989}{x+3},$$

или $y = x-1-\dfrac{1989}{x+3}$. Да би број $\dfrac{1989}{x+3}$ био природан, $x+3$ мора бити дељитељ броја 1989, тј. један од бројева $1, 3, 9, 13, 17, 39, 51, 117, 221, 663$ или 1989. Како је и y природан број, првих шест вредности за $x+3$ (а самим тим и за x) не долазе у обзир, па имамо следећих шест решења (x, y) за дату једначину: $(48, 8), (114, 96), (150, 136), (218, 208), (660, 656), (1986, 1984)$.

30. Једноставном трансформацијом, дата једначина се своди на

$$5(x-1)(x+1) - 4y^2 = 1994.$$

С обзиром да је $5x^2 - 4y^2 = 1999$ непаран број, закључујемо да је x непарно. Тада је $(x-1)(x+1)$ производ узастопних парних бројева и дељив је са 4. Ако се горња једначина подели са 4, онда је њена лева страна цео број, док десна није.