

## Домаћи задатак за деветнаесту недељу

69. а) Спољашњи углови троугла једнаки су угловима  $13\theta, 20\theta, 21\theta$ . Израчунати унутрашње и спољашње углове овог троугла.
- б) Ако се спољашњи угао код темена  $A$  повећа за  $35^\circ$ , а спољашњи угао код темена  $B$  смањи за  $20^\circ$ , тада се унутрашњи угао код темена  $C$  троугла  $ABC$  повећа за своју четвртину. Израчунати унутрашњи угао код темена  $C$ .
- в) Спољашњи угао једнакокраког троугла је  $72^\circ$ . Израчунати угао између висине и симетрале унутрашњег угла, ако оне садрже исто теме основице.
- г) Израчунати унутрашње углове једнакокраког троугла ако:
- висина која одговара једном краку одређује са другим краком угао од  $32^\circ$ ;
  - висине које одговарају крацима секу се под углом од  $48^\circ$ ;
  - симетрала угла на основици сече симетралу угла при врху, под углом од  $130^\circ$ ;
  - висина која одговара краку и висина која одговара основици образују оштар угао  $\psi$ ;
  - симетрала угла на основици сече наспрамни крак под тупим углом  $\theta$ .
- д) Ако су  $AD$  и  $BE$  висине троугла  $ABC$ , доказати да је  $\angle DAC = \angle EBC$ .
- ђ) Ако су  $AD$  и  $BE$  висине троугла  $ABC$ , доказати да је  $\angle ACB = \angle ABE + \angle BAD$ .
70. а) Свака страница троугла мања је од половине његовог обима. Доказати.
- б) Ако за странице троугла важи  $a < b < c$ , доказати:
- $a < \frac{a+b+c}{3}$ ;
  - $c > \frac{a+b+c}{3}$
- в) Доказати да је збир висина троугла мањи је од обима троугла.
- г) Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од полуобима троугла.
- д) Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од  $\frac{3}{4}$  његовог обима.
- ђ) Ако су  $a, b, c$  странице троугла, а  $t_a$  тежишна дуж, доказати да је  $\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2}$ .
- е) Симетрала унутрашњег угла троугла дели наспрамну страницу на два дела од којих је сваки мањи од суседне странице. Доказати.

- ж) Центар уписаног круга у троуглу најближи је темену највећег угла троугла. Доказати.
71. а) Симетрала угла на основици једнакокраког троугла сече бочну страну под углом једнаким углу на основици. Одредити углове тог троугла.
- б) У правоуглом троуглу хипотенузина висина и хипотенузина тежишна линија образују са катетама једнаке углове. Доказати.
- в) Троугао  $ABC$  има углове  $\beta = 15^\circ$  и  $\gamma = 30^\circ$ . Права која садржи тачку  $A$  и нормална је на  $AB$  сече дуж  $BC$  у тачки  $D$ . Доказати да је  $2AC = BD$ .
- г) Израчунати угао који образују висина и симетрала угла из код темена  $C$  троугла  $ABC$ , ако су познати углови  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ).
- д) У правоуглом троуглу један од углова је  $30^\circ$ . Ако је тачка  $M$  средиште хипотенузе и  $N$  тачка катете таква да је права  $MN$  нормална на хипотенузу, онда је дуж  $MN$  три пута мања од веће катете датог троугла. Доказати.
72. а) На хипотенузи  $BC$  правоуглог троугла  $ABC$  дате су тачке  $D$  и  $E$  такве да је  $BE = AB$  и  $CD = AC$ . Израчунати угао  $DAE$ .
- б) У правоуглом троуглу  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) конструисане су симетрале  $AD$  и  $BE$  углова у теменима  $A$  и  $B$ . Из тачака  $D$  и  $E$  конструисане су нормале  $DN$  и  $EM$  на хипотенузу. Доказати да је  $\angle MCN = 45^\circ$ .
- в) У троуглу  $ABC$  дата је висина  $CE$ . Симетрала спољашњег угла код темена  $C$  сече праву  $AB$  у тачки  $D$ . Ако је  $CE = \frac{1}{2}CD$ , онда је  $\alpha - \beta = 60^\circ$ . Доказати.
- г) Нека су  $A', B'$  и  $C'$  редом средишта страна  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  троугла  $ABC$  и  $D$  подножје висине из  $A$ . Доказати да је  $\angle DC'A' = \angle DB'A' = \angle B - \angle C$  ( $AC > AB$ ).
- д) Нека су  $AD$  и  $CE$  висине троугла  $ABC$  и  $H$  његов ортоцентар. Ако је  $CH = AB$ , израчунати угао  $ACB$ .
- ђ) У троуглу  $ABC$  центри уписаног и описаног круга симетрични су у односу на страну  $AB$ . Израчунати унутрашње углове троугла  $ABC$ .
73. а) У једнакокраком троуглу  $ABC$  тачка  $M$  је средиште основице  $AB$ . Нека је  $N$  тачка крака  $BC$ , таква је  $MN \perp BC$  и нека је  $S$  средиште дужи  $MN$ . Доказати да је права  $AN$  нормална на  $CS$ .
- б) Ако је  $O$  ортоцентар троугла  $ABC$ , доказати да је  $\angle BOC + \angle BAC = 180^\circ$ .
- в) У правоуглом троуглу угао између висине и тежишне дужи и одговара хипотенузи је  $10^\circ$ . Колики су оштри углови овог троугла?
- г) У једнакокраком  $\triangle ABC$  ( $AC = BC$ ) угао код темена  $C$  је  $108^\circ$ . Доказати да је дужина висине  $CD$  једнака половини дужине симетрале  $AE$  унутрашњег угла  $A$ .