Домаћи задатак за двадесет прву недељу

77. а) На датој кружници тачке A, B, C деле кружнице на три дела. Израчунати унутрашње углове троугла ABC ако се делови кружнице односе као $1 : 3 : 5$.

б) Тачкама A и B кружна линија је подељена на два кружна лука који стоје у размери $5 : 7$. Израчунати периферијске углове који одговарају кружним луцима.

в) Израчунати угао између тангенте и тетиве ако тетива дели кружницу на два лика у размери $3 : 7$.

г) Нека су D, E и F додирне тачке уписане кружнице у троуглу ABC. Доказати да су углови троугла DEF, $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$, где су углови α, β и γ углови троугла ABC.

д) Симетрале углова троугла ABC, секу описану кружницу око троугла у тачкама X, Y, Z. Углови троугла XYZ су: $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$. Доказати. (α, β, γ углови троугла ABC)

ђ) Нека су A, B и C три неколинеарне тачке и нека је M, $M \neq B$ заједничка тачка кругова конструисаних над пречницима AB и BC. Доказати да су тачке A, C и M колинеарне.

е) Ако се две једнаке тетиве неког круга секу, онда су делови једне једнаки деловима друге тетиве. Доказати.

ж) У датом кругу пречника AB дата је тетива DC, паралелна са AB. Доказати да је у троуглу ACD разлика двају углова једнака правом углу.

з) Ако је s полуобим и c хипотенуза правоуглог троугла, онда је полупречник уписаног круга једнак $s - c$. Доказати.

и) Два круга се споља додирују у тачки A. Нека су B и C додирне тачке ових кругова са једном њиховом спољачњом тангентом. Доказати да је $\angle BAC = 90°$.

ј) Нека су AP и AQ тангентне дужи датог круга. Ако се кроз тачку M већег лука PQ конструише тангента која сече праве AP и AQ редом у тачкама B и C, доказати да су $AB + AC - BC$ и $\angle BOC$ константне величине.

к) Троугао ABC је уписан у круг k. Знајући углове α, β, γ овог троугла, израчунати углове троугла који образују тангенте на круг k у тачкама A, B, C.

л) Око троугла ABC, $b > c$, описан је круг. Из средишта E лука $\widehat{BC}$ повучен је пречник ED. Доказати да је $\angle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

љ) Око оштроуглог троугла ABC описан је круг. Нека су M, N и P редом тачке, у којима висине из темена A, B и C секу описани круг. Доказати да ортоцентар $\triangle ABC$ представља центар уписаног круга у $\triangle MNP$.

м) На страници BC троугла ABC дата је тачка M. Нека су O_1 и O_2 центри кругова описаних око троуглова ABM и ACM. Доказати да је $\angle O_1AO_2 = \angle BAC$.

78. а) Доказати да тачке симетричне ортоцентру троугла у односу на странице припадају описаном кругу.

б) Нека је H ортоцентар троугла ABC и нека је D тачка на кругу описаном око троугла ABC која је дијаметрално супротна тачки C. Доказати да је четвороугао $ADBH$ паралелограм.

в) Нека је H ортоцентар троугла ABC, O центар описаног круга и E средиште странице BC. Доказати да је $AH = 2OE$.

79. а) Симетрале унутрашњих углова ма ког четвороугла увек образују тетивни четвороугао. Доказати.

б) Ако су AM и BN висине троугла ABC, тада је четвороугао $ABMN$ тетивни. Доказати.

в) Четвороугао има три унутрашња угла: $103°34'$, $75°16'$ и $104°44'$. Може ли се око овог четвороугла описати круг?

г) Какав се трапез може уписати у круг?

д) Ако је средња линија једнакокраког трапеза једнака краку, доказати да се у тај трапез може уписати круг.

ђ) У темену B конструисана је тангента t круга описаног око $\triangle ABC$. Ако права p, паралелна са t, сече странице BA и BC у тачкама D и E, доказати да је четвороугао $ACED$ тетивни.

е) Пресеци симетрала унутрашњих углова конвексног четвороугла $ABCD$ одређују темена тетивног четвороугла.

ж) Дат је тангентни четвороугао $ABCD$. Ако је O центар уписаног круга овог четвороугла, доказати да је $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

80. а) Доказати да је произвољан конвексан четвороугао потпуно покривен са четири круга конструисана над његовим страницама као пречницима.

б) Теме угла α је изван датог круга. Краци угла одређују на кругу два лука који су у размери $3 : 10$. Већи од тих лукова одговара централном углу од $40°$. Колико степени има угао α?

в) Дат је конвексан четвороугао $ABCD$, код кога је $\angle ABD = 50°$, $\angle ADB = 80°$, $\angle ACB = 40°$ и $\angle DBC = \angle BDC + 30°$. Израчунати $\angle DBC$.

г) Права MN је заједничка тангента кругова k_1 и k_2 који се секу у тачкама A и B (M и N су додирне тачке). Израчунати $\angle MAN + \angle MBN$.

д) Тангенте из тачке P додирују круг k са центром O у тачкама A и B. Ако је K пресечна тачка круга k и дужи PO, доказати да је права AK симетрала угла PAB.

ђ) Дата су два круга која се секу. Ако се у произвољној пресечној тачки конструише сечица p и кроз пресечне тачке са датим круговима поставе тангенте, ове тангенте се секу под сталним углом. Доказати.

е) У кружници са центром O уписан је четвороугао са међусобно нормалним дијагоналама. Доказати да је удаљеност тачке O од једне странице четвороугла једнака половини наспрамне странице.

ж) Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Нека је $AD \cap BC = \{H\}$ и $CD \cap AB = \{E\}$. Симетрала угла DEA сече странице DA и CB у тачкама P и M, а симетрала угла DHC сече странице DC и BA у тачкама N и L. Доказати да је четвороугао $LMNP$ ромб.

з) Нека су M и N тачке додира круга уписаног у троуглу ABC са страницама AB и AC, а P тачка пресека праве MN са симетралом угла ABC. Доказати да је угао BPC прав.

и) Нека је M произвољна тачка у $\triangle ABC$. Доказати да је $\angle ACB < \angle AMB$.