Математичка логика

1. а) Доказати да је формула $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$ таутологија.
   б) Да ли је формула $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ таутологија? Образложити одговор.

2. Доказати да је формула
   $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r) \wedge (p \vee r \Leftrightarrow q \vee r))$ таутологија.

3. Одредити елементе скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ за које су следеће формуле тачне:
   а) $(x \neq 3 \wedge x = 4) \Rightarrow x \neq 1$;
   б) $x \leq 3 \Leftrightarrow x \neq 2$;
   в) $\neg(x = 3 \vee x \neq 2) \Leftrightarrow x > 3$.

4. Дати су скупови $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, f\}$, $C = \{b, e, f, g\}$, $D = \{a, f, g, h\}$. Одредити скуп S тако да важи $S \subset A$, $S \cap (B \cup D) = \emptyset$, $(A \cap C) \setminus S = \emptyset$ и $\{c\} \setminus S = \{c\}$. Образложити одговор.

5. Доказати да за све скупове A, B, C важи:
   $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

6. Доказати да за све скупове A и B важи $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) = B$.

7. Одредити скупове A и B за које важи: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,$2 \in A \setminus B$, $3 \in B \setminus A$, $A \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$, $B \cap \{1\} = \emptyset$.

8. а) Дати су скупови $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{d, e, f, g\}$. Одредити скуп C, који има два елемента, такав да важи $C \setminus B = \emptyset$ и $A \setminus C = \{a, b, c\}$.
   б) За скупове из а) одредити $(A \cap B) \setminus C$ и $A \cap (B \setminus C)$.
   в) Доказати да за све скупове P, Q, R важи $(P \cap Q) \setminus R = P \cap (Q \setminus R)$.

9. У скупу $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ уведена је релација ρ, $x \rho y \Leftrightarrow 3 | x + y$, тј. x и y су у релацији ρ ако и само ако је њихов збир дељив са 3. Нацртати граф и направити таблицу релације ρ и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ.

10. На скупу $\{0, 1, 2, 3\}$ дефинисана је релација ρ: $x \rho y \Leftrightarrow x + y < 2$. Направити таблицу релације и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ.

11. На скупу $A = \{0, 1, 2, 3\}$ дефинисана је релација $x \rho y \Leftrightarrow x \geq y + 1$. Направити таблицу за релацију ρ и испитати која од својстава: рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ.

12. У скупу $M = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}\}$ уочена је релација ρ: $x\rho y \Leftrightarrow x \in y$. Нацртати граф релације, направити таблицу релације и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, транзитивност има релација ρ.

13. Нека је $M = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ и $f : M \to M$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
а) Доказати да важи $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} = -f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
б) Доказати да је f бијекција и наћи $f^{-1}(x)$.

14. Нека за функцију функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $f(2-x) = x+1$.
а) Одредити $f(x)$.
б) Испитати да ли је f $1-1$ и „*na*" пресликавање.
в) Наћи f^{-1}.

15. Нека је $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x+1$.
а) Одредити функцију f ако је $f(x) = g(g(x)) - g(x)$.
б) Доказати да је f бијекција и наћи $f^{-1}(x)$.

16. Нека је $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(5-2x) = 4x-7$.
а) Одредити $g(x)$.
б) Одредити функцију f, ако је $f = g \circ g$.
в) Доказати да је f „$1-1$" и „*na*" пресликавање и одредити $f^{-1}(x)$.

17. Одредити све рационалне бројеве a и b тако да важи $(a-\sqrt{2})(6-a+\sqrt{2}) = b$.

18. Одредити све природне бројеве n такве да је број $\dfrac{2n+1}{n+2}$ цео.

19. Нека је n цео број. Доказати да је број $n(n-3)(n^2-3n+14)$ дељив са : а) 3 ; б) 8.