

Пролећни домаћи из аналитичке геометрије

1. Израчунати величину оштрог угла између правих

$$(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0, \quad x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0.$$

2. Одредити координате тачке T која је симетрична тачки $S = (x_0, y_0)$ у односу на праву $ax + by + c = 0$.
3. Наћи тачку M која је симетрична тачки $(8, -9)$ у односу на праву која садржи тачке $(3, -4)$ и $(-1, -2)$.
4. Центар прамена правих $\alpha(2x - 3y + 20) + \beta(3x + 5y - 27) = 0$ је теме квадрата чија дијагонала лежи на правој $x + 7y - 16 = 0$. Написати једначине страница и једначину друге дијагонале овог квадрата.
5. Доказати да праве $(t + 4)x + (3t - 1)y + (t - 2) = 0$ за све реалне вредности t пролазе кроз једну сталну тачку.
6. Темена троугла су $A = (1, 3)$, $B = (2, -2)$, $C = (3, 5)$. Колико је растојање тежишта троугла од његове најмање странице?
7. Наћи симетрале унутрашњих углова троугла чије су странице дате једначинама $3x + 4y = 36$, $5x + 12y = 20$, $24x + 7y = 21$. Одредити координате центра круга уписаног у дати троугао.
8. Координате темена троугла су: $(-1, -1)$, $(-3, 5)$, $(7, 11)$. Одредити једначине: (а) висина; (б) тежишних линија; (в) симетрала страница. Одредити ортоцентар H , тежиште T и центар S описаног круга око датог троугла и доказати да се те три тачке налазе на истој правој (Ојлерова права). Доказати да је $|HS| = 3|TS|$.
9. Написати једначину праве која са x -осом образује два пута већи угао од угла који образује права $2x - 3y + 6 = 0$ и која садржи координатни почетак.
10. Наћи геометријско место тачака у равни чија је свака тачка једнако удаљена од тачака $(5, 2)$ и $(1, 4)$.
11. Одредити геометријско место средина дужи које се могу конструисати из тачке $(3, 0)$ на праву $y = x + 1$.
12. Одредити геометријско место тачака у равни из којих се спуштене нормале на праве $3x - 4y - 8 = 0$ и $5x + 12y - 48 = 0$ односе као $3 : 2$.
13. Одредити једначину кружне линије која садржи тачке $(3, 4)$, $(4, 5)$, а чији центар лежи на линији $x^2 + y^2 = 50$.

14. Наћи једначину кружне линије која додирује праве $3x + 4y - 35 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$, $x = 1$.
15. Једначине страница троугла ABC су: $x + 2y = 5$, $x = 3y$, $y = 2x$. Написати једначину кружне линије која је уписана у троугао ABC .
16. Одредити темена троугла чије странице додирују кружну линију $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ у тачкама $(4, 2)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$.
17. Под којим углом се види кружна линија $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 15 = 0$ из тачке $(1, 2)$?
18. На кружну линију $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$ конструисане су тангенте из тачке $(2, -3)$. Наћи једначину тетиве која пролази кроз додирне тачке тангенти и кружне линије.
19. Из тачке M која припада правој $l : 2x - 4$ конструисане су тангенте на кружну линију $x^2 + y^2 = 1$, које је додирују у тачкама A и B . Доказати да за разне положаје тачке M (али такве да та тачка остаје на правој l) све тетиве AB пролазе кроз сталну тачку P и наћи координате тачке P .
20. Из тачке P конструисане су тангенте на кружну линију $x^2 + y^2 = r^2$ које је додирују у тачкама A и B . Ако је $|AB| = 2b$, где је b константа, доказати да тачка P припада кружној линији $(r^2 - b^2)(x^2 + y^2) = r^4$.
21. Оштар угао између тангенти из тачке P на кружну линију $x^2 + y^2 = r^2$ износи 45° . Доказати да тачка P припада једној од кружних линија $x^2 + y^2 = 2r^2(2 + \sqrt{2})$ или $x^2 + y^2 = 2r^2(2 - \sqrt{2})$.
22. У тачкама $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(9, 6)$ параболе $y = 4x$ конструисати тангенте, а затим израчунати површину троугла чије су странице на тим тангентима.
23. Под којим се углом види елипса $x^2 + 2y^2 = 162$ из тачке $(6, 15)$?
24. У једначини $ax - 3y = 24$ одредити a , тако да та права буде тангента хиперболе $x^2 - y^2 = 36$.
25. Из тачке $(1, -5)$ конструисати тангенте на хиперболу $5x^2 - 3y^2 = 1$ и израчунати растојање од те тачке до праве која пролази кроз додирне тачке хиперболе и тангената.
26. Доказати да за свако a права $(a + 2)x - (a - 1)y - 2a - 3 = 0$ пролази кроз једну сталну тачку и одредити координате те тачке.
27. Доказати да се кружне линије $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 18a^2 = 0$ и $x^2 + y^2 - 8ax - ay + 15a^2 = 0$. Доказати да се додирују и наћи тачку додира.
28. Одредити геометријско место центара свих кружних линија које додирују кружну линију $x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$ и праву $y = -4$.
29. Дата је елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Одредити геометријско место тачака из којих се она види под правим углом.

30. Хиперболу $3x^2 - 4y^2 = 12$ сече у тачки $(4, -3)$ кружна линија под правим углом. Наћи једначину кружне линије ако се њен центар налази на x -оси.
31. Права $x - 2y + 8 = 0$ је заједничка тангента елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и са њом конфокалне параболе $y^2 = 2px$. (а) Одредити једначине елипсе и параболе. (б) Написати једначину кружне линије која садржи обе додирне тачке и чије средиште припада датој тангенти. (в) Доказати да тој линији припада и заједничка жижа елипсе и параболе.
32. Дата је једначина тангенте $x + y + 1 = 0$ на хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и растојање жиже од координатног почетка $\sqrt{7}$. (а) Написати једначину хиперболе. (б) Написати једначину параболе $y^2 = 2px$ коју додирује дата тангента. (в) Написати једначину кружне линије чије се средиште налази у тачки $(0, 2)$, којој је заједничка тангента параболе и хиперболе такође тангента. (г) Доказати да се додирна тачка кружне линије налази на средини растојања додирних тачака тангента хиперболе и параболе.