Домаћи задатак за III разред

1. Решити по z једначину:
   а) $|z| + z = 2 + i$; б) $|z| - z = 1 + 2i$.

2. Решити по z једначину:
   а) $z^2 = \overline{z}$; б) $z^3 = \overline{z}$.

3. Одредити комплексан број $z = x + iy$ ако је $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \wedge \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

4. Одредити комплексан број $z = x + iy$ ако је $|z^2 - 2i| = \wedge \left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$.

5. Ако је $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ показати да је $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ и $\alpha^3 = 1$, а затим одредити реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{a\alpha^2 + b\alpha}{a + b\alpha^2}$.

6. Израчунати $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

7. Шта представља скуп тачака у z, у Гаусовој равни, ако је:
   а) $|z-3| = 5$;
   б) $|z+2| + |z-2| = 5$;
   в) $|z| = R(z) + 1$;
   г) $|z+i| = 2$;
   д) $|z-i| = |z+2|$;
   ђ) $|z-1| = |z+1| = |z - i\sqrt{2}|$.

8. Одредити области којима припадају тачке у Гаусовој равни, ако је:
   а) $2 \leq |z| \leq 5$;
   б) $3 \leq |z+i| \leq 5$;
   в) $J_m(z) \leq 3$;
   г) $R(z) + J_m(z) < 1$;
   д) $0 < \arg z \leq \pi/4$;
   ђ) $-\pi/3 \leq \arg z \leq \pi/3$.

9. Претворити у тригонометријски облик комплексне бројеве $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_5 = 1 + \sin\alpha - i\cos\alpha$.

10. Применом Моавровог обрасца израчунати z^{20}, ако је $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

11. Израчунати у пољу комплексних бројева: (а) $\sqrt[3]{1}$; (б) $\sqrt[4]{-4}$; (в) $\sqrt[6]{-1}$.

12. Израчунати све вредности израза $(-16)^{3/4}$.

13. Одредити комплексан број $z = x + iy$ ако је $\left|\frac{16z+1}{4\overline{z}}\right| = 4 \wedge R_e\left(\frac{2z}{\overline{z}}\right) = 1$. Затим израчунати све вредности $\sqrt[4]{z}$.

14. Одредити комплексан број $z = x + iy$ ако је $\left|\frac{z+4}{\overline{z}+12}\right| = 1 \wedge R_e\left(\frac{\overline{z}}{z}\right) = -0.5$. Затим израчунати све вредности $\sqrt[4]{z}$.

15. Решити по x једначину $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

16. Користећи Моавров образац изразити:

    а) $\sin 5\alpha$ у функцији $\sin\alpha$ и $\cos 5\alpha$ у функцији $\cos\alpha$. б) $\sin 7\alpha$ у функцији $\sin\alpha$ и $\cos 7\alpha$ у функцији $\cos\alpha$.

17. Ако је $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, тада је:

    а) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$; б) $x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\alpha$.

18. Решити једначину $6x^4 - 13x^3 - 35x^2 - x + 3 = 0$, ако се зна да је $2 - \sqrt{3}$ један њен корен.

19. Дата је једначина $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + a = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Одредити a тако да $x = 2$ буде корен дате једначине и за то a, одредити све нуле полинома.

20. Решити једначину $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, ако је познато да њена два корена задовољавају релацију $2x_1 - 4x_2 = 1$.

21. Решити једначину $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 58x + 35 = 0$, ако је један њен корен комплексан број $2 + i$.

22. Решити једначине $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ и $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$, ако имају заједнички корен.

23. Доказати да је полином $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 27x + 14$, дељив полиномом $x^2 + 3x + 2$, а затим решити једначину $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = 0$.

24. Решити једначину $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 17x - 6 = 0$, ако је збир два њена решења једнак 5.

25. У једначини $x^3 - 12x^2 + mx - 60 = 0$, одредити $m \in \mathbf{R}$, ако су решења дате једначине странице правоуглог троугла.

26. Наћи скуп решења система:

$$\begin{cases} x - y - z = -5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ xy + xz + yz = 26 \end{cases}$$

27. Наћи скуп решења система:

$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 45 \\ (y+z)(z+x) = 30 \\ (x+z)(x+y) = 54 \end{cases}$$