

## Списак задатака за *IV* разред

1. Која од следећих једначина одређује  $y$  као функцију од  $x$ :

а)  $3x + 2y = 1$ ; б)  $x = y^2 - 3$ ; в)  $x^2 = y^3 - 3$ ; г)  $x^2 + 3xy + y^2 = 8$ ; д)  $x = \frac{y-1}{y+1}$ ;

ђ)  $3x - 4 - 3^y = 0$ ; е)  $2^{x+y} - 3 = 0$ ; ж)  $x = 10^y - 10^{-y}$ ?

2. Одредити област дефинисаности функција:

а)  $g(x) = \sqrt{5-x^2}$ ; б)  $\psi(x) = \ln(x^2 - 6x)$ ; в)  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{x+3}}$ ;

г)  $y = \sqrt{\frac{(x-6)^2 \cdot (3-x)}{x+5}} + \sqrt[3]{\frac{5x^3 - 7x^2 + 8x - 2}{2x-3}}$ ; д)  $y = \sqrt{(8+2x-15x^2) \log_{\frac{1}{2}}(x+5)}$ .

3. Одредити област дефинисаности функција:

а)  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(3x^2 - 2x)}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2-4}{2x-7}}$ ; в)  $y = \sqrt{\frac{2x+9}{2-0,3x}} - \sqrt{\frac{x^2-12x-45}{x^2+2x+3}}$

4. Испитати парност следећих функција:

а)  $f(x) = x^2 - 1 - 3 \cos x$ ; б)  $f(x) = x^2 + 1 + \sin x^2$ ; в)  $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$ ; г)  $f(x) = \frac{x}{\sin x} + 1$ ;

д)  $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x - x^3}{\cos^2 x}$ ; ђ)  $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}$ ; е)  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ ; ж)  $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$ ;

з)  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ ; и)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x} + \sin x \cos 2x$ .

5. а) Доказати да је функција  $f(x) = \frac{(1+a^x)^2}{a^x}$  парна;

б) Доказати да је функција  $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$  непарна.

6. Одредити основни период функција:

а)  $y = a \sin bx$ ; б)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; в)  $y = \cos^2 x$ ; г)  $y = \sin^2 \frac{x}{2}$ ; д)  $y = \sin x \cos x$ ;

ђ)  $y = \operatorname{tg}(x+a)$ ; е)  $y = a \cos px + b \sin px$ .

7. \* Одредити основни период и ограниченост функција:

а)  $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ ; б)  $y = \cos^6 x + \sin^6 x$ ; в)  $y = 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 3$ ; г)  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 3}$ ;

д)  $y = a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x$ ; ђ)  $y = \frac{3}{2} \sin \frac{3}{2}x + 4 \cos \frac{5}{6}x + \operatorname{tg} 10x$ .

8. а) Ако је  $f(x) = \sin \pi x$  и  $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ , одредити  $(g \circ f)(-11)$  и  $(f \circ g)(-11)$ ;

б) Ако је  $f(x) = \log_2 x$  и  $g(x) = 2x - x^2 - 6$ , одредити  $(f \circ g)(2)$ ,  $(g \circ f)(\frac{1}{8})$ ;

в)\* Ако је  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1}$ , одредити  $f\left(\sqrt{\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} - 5}\right)$ .

9. Одредити инверзне функције и скицирати њихове графике:

а)  $f(x) = x^2$ ; б)  $f(x) = \log_2(x-1)$ ; в)  $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; г)  $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ , ( $a > 1$ ).

10. Одредити инверзне функције и скицирати њихове графике:

а)  $y = \log_2(x+2)$ ; б)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ ; в)  $y = \frac{3 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$ ; г)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$ .

11. а) Ако је  $f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$ , наћи  $f\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ ;  
 б) Ако је  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{I} \end{cases}$ , наћи  $f(\sqrt{2})$ ,  $f(\pi)$ ,  $f(-3, 14)$ ,  $f(\sin 3)$ ,  $f(\log_2 \sqrt[3]{4})$ ,  $f(12, 1212\dots)$ ,  
 $f(4^{-0.5})$ ,  $f(2^{-2^2})$ ;  
 в) Ако је  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , одредити  $f(x)$ ;
12. Нацртати у истом координатном систему графике функција:  
 а)  $y = x^2$ ;  $y = (x+3)^2$ ;  $y = (x-2)^2 - 3$ ;  
 б)  $y = \log_2 x$ ;  $y = \log_2(x-3)$ ;  $y = \log_2 x + 1$ ;  
 в)  $y = 2^x$ ;  $y = 2^{x+3}$ ;  $y = 2^x - 3$ .
13. Нацртати у истом координатном систему графике функција:  
 а)  $y = \sin x$ ;  $y = \sin 2x$ ;  $y = 3 \sin x$ ;  
 б)  $y = |x|$ ;  $y = \frac{1}{2}|x|$ ;  $y = -3|x|$ ;  
 в)  $y = |x|$ ;  $y = |x-4|$ ;  $y = |x+2| - 3$ .
14. Израчунати граничну вредност низа:  
 а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^5 + 2n^4 + 3n - 2}{7n^5 + 3n^3 + n}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 4} + 2n^2}{n^3 - 3n + 2}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 1} + \sqrt{2n^2 + 1}}{(\sqrt{n+1} - 1)^2}$ ;  
 г)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ ; д)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}$ ; ђ)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 3n + 4)^3 - (n^2 + 3n - 4)^3}{(n^2 + 5n + 6)^3 - (n^2 + 5n - 6)^3}$ ;  
 е)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$ ; ж)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^3}{n-5} - \frac{2n^4 + n^3 - 4n^2 + 5}{2n^2 - 9n - 5} \right)$ ;
15. Израчунати граничну вредност:  
 а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 2n})$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - 4n + 3})$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 4n + 3} - \sqrt{3n^2 + 3}}$ ;  
 г)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 3} - \sqrt{5n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 5} - \sqrt{3n^2 + 1}}$ ; д)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - \sqrt{16n^2 - 3}}{\sqrt{9n^2 + 4} - 3n}$ ; ђ)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1})}{\sqrt[3]{2n^2+1} - \sqrt[3]{2n^2-1}}$ ;  
 е)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2} - n)$ ; ж)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt[3]{n^2 - n^3})$ ; з)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2+1} - \sqrt[3]{2n^2-1}}{\sqrt{4n^2+11} - \sqrt{4n^2-11}}$ ;  
 и)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+4} - n}{2n - \sqrt[4]{16n^4+1}}$ ; ј)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{8n^3+1} - 2n}$ ; к)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+2n} - n}{\sqrt[3]{8n^3+1} - 2n}$ .
16. Без коришћења Лопиталовог правила, испитати граничну вредност функције:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^6 - 64}$ ;  
 д)  $\lim_{x \rightarrow -5} \left( \frac{6(x+3)}{x^2 + 6x + 5} - \frac{5(x+2)}{x^2 + 5x} \right)$ ; р)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[5]{x^4+2}}$ ; ђ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+6x^2-1} + \sqrt{4x^2-1}}{x+2+\sqrt{x-2}}$ ;  
 ѓ)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ ; з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}})$ ;  
 и)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{1-x}$ ; к)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ ; л)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right)$ ; њ)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$ ;  
 м)\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$ ; н)\*  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[3]{5-x^2}}{x^2-4}$ .