

Други домаћи задатак *

1. Која од следећих једначина одређује y као функцију од x :
 - а) $3x + 2y = 1$; б) $x = y^2 - 3$; в) $x^2 = y^3 - 3$; г) $x^2 + 3xy + y^2 = 8$;
 - д) $x = \frac{y-1}{y+1}$; њ) $3x - 4 - 3^y = 0$; е) $2^{x+y} - 3 = 0$; ж) $x = 10^y - 10^{-y}$?
2. Одредити област дефинисаности функција:
 - а) $g(x) = \sqrt{5-x^2}$; б) $y = \sqrt{\frac{(x-6)^2 \cdot (3-x)}{x+5}} + \sqrt[3]{\frac{5x^3 - 7x^2 + 8x - 2}{2x-3}}$;
 - в) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{x+3}}$; г) $\psi(x) = \ln(x^2-6x)$; д) $y = \sqrt{(8+2x-15x^2) \log_{\frac{1}{2}}(x+5)}$.
3. Одредити област дефинисаности функција:
 - а) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(3x^2-2x)}$; б) $y = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2-4}{2x-7}}$;
 - в) $y = \sqrt{\frac{2x+9}{2-0,3x}} - \sqrt{\frac{x^2-12x-45}{x^2+2x+3}}$
4. Испитати парност следећих функција:
 - а) $f(x) = x^2 - 1 - 3 \cos x$; б) $f(x) = x^2 + 1 + \sin x^2$;
 - в) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$; г) $f(x) = \frac{x}{\sin x} + 1$; д) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x - x^3}{\cos^2 x}$;
 - ђ) $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}$; е) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$; ж) $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$;
 - з) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$; и) $y = \ln \frac{1+x}{1-x} + \sin x \cos 2x$.
5. а) Доказати да је функција $f(x) = \frac{(1+a^x)^2}{a^x}$ парна;
 б) Доказати да је функција $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ непарна.
6. Одредити основни период функција:
 - а) $y = a \sin bx$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $y = \cos^2 x$; г) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$;
 - д) $y = \sin x \cos x$; њ) $y = \operatorname{tg}(x+a)$; е) $y = a \cos px + b \sin px$.
7. * Одредити основни период и ограниченост функција:
 - а) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$; б) $y = \cos^6 x + \sin^6 x$; в) $y = 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 3$;
 - г) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 3}$; д) $y = a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x$;
 - ђ) $y = \frac{3}{2} \sin \frac{3}{2}x + 4 \cos \frac{5}{6}x + \operatorname{tg} 10x$.

*27.9. 2012, оба смера

8. а) Ако је $f(x) = \sin \pi x$ и $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$, одредити $(g \circ f)(-11)$ и $(f \circ g)(-11)$;
 б) Ако је $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = 2x - x^2 - 6$, одредити $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)\left(\frac{1}{8}\right)$;
- в)* Ако је $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1}$, одредити $f\left(\sqrt{\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} - 5}\right)$.
9. Одредити инверзне функције и скицирати њихове графике:
 а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \log_2(x - 1)$; в) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
 г) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, ($a > 1$).
10. Одредити инверзне функције и скицирати њихове графике:
 а) $y = \log_2(x + 2)$; б) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$;
 в) $y = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$.
11. а) Ако је $f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$, наћи $f\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$;
 б) Ако је $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{I} \end{cases}$, наћи $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$, $f(-3, 14)$, $f(\sin 3)$, $f(\log_2 \sqrt[3]{4})$, $f(12, 1212 \dots)$, $f(4^{-0.5})$, $f(2^{-2^2})$;
 в) Ако је $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, одредити $f(x)$;
12. Нацртати у истом координатном систему графике функција:
 а) $y = x^2$; $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2 - 3$;
 б) $y = \log_2 x$; $y = \log_2(x - 3)$; $y = \log_2 x + 1$;
 в) $y = 2^x$; $y = 2^{x+3}$; $y = 2^x - 3$.
13. Нацртати у истом координатном систему графике функција:
 а) $y = \sin x$; $y = \sin 2x$; $y = 3 \sin x$;
 б) $y = |x|$; $y = \frac{1}{2}|x|$; $y = -3|x|$;
 в) $y = |x|$; $y = |x - 4|$; $y = |x + 2| - 3$.
14. Израчунати граничну вредност низа:
 а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^5 + 2n^4 + 3n - 2}{7n^5 + 3n^3 + n}$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 4} + 2n^2}{n^3 - 3n + 2}$;
 в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 1} + \sqrt{2n^2 + 1}}{(\sqrt{n+1} - 1)^2}$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$;
 д) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}$; ж) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 3n + 4)^3 - (n^2 + 3n - 4)^3}{(n^2 + 5n + 6)^3 - (n^2 + 5n - 6)^3}$;
 е) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$; ж) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3}{n-5} - \frac{2n^4 + n^3 - 4n^2 + 5}{2n^2 - 9n - 5}\right)$;

15. Израчунати граничну вредност:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 2n}); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - 4n + 3}); \\
 & \text{в) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 4n + 3} - \sqrt{3n^2 + 3}}; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 3} - \sqrt{5n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 5} - \sqrt{3n^2 + 1}}; \\
 & \text{д) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - \sqrt{16n^2 - 3}}{\sqrt{9n^2 + 4} - 3n}; \quad \text{ђ) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2n + 1} - \sqrt[3]{2n - 1}); \\
 & \text{е) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2} - n); \quad \text{ж) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt[3]{n^2 - n^3}); \\
 & \text{з) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 1}}{\sqrt{4n^2 + 11} - \sqrt{4n^2 - 11}}; \quad \text{и) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4 + 4} - n}{2n - \sqrt[4]{16n^4 + 1}}; \\
 & \text{ј) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}}{\sqrt[3]{8n^3 + 1} - 2n}; \quad \text{к) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4 + 2n} - n}{\sqrt[3]{8n^3 + 1} - 2n}.
 \end{aligned}$$

16. Одредити граничну вредност функције:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}; \\
 & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^6 - 64}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{6(x + 3)}{x^2 + 6x + 5} - \frac{5(x + 2)}{x^2 + 5x} \right); \\
 & \text{ђ) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 2}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 2}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 6x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 - 1}}{x + 2 + \sqrt{x - 2}}; \\
 & \text{ж) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}; \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}; \\
 & \text{ј) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{1 - x}; \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}; \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right); \\
 & \text{љ) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}); \quad \text{м)* } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt[3]{x + 1}}{x}; \\
 & \text{н)* } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - \sqrt{3 + x^2}}{x - 1}; \quad \text{њ)* } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x + 3} - \sqrt[3]{5 - x^2}}{x^2 - 4}.
 \end{aligned}$$