

Задаци из Тангенте *

1. Дата је функција

$$f(x) = \log_3 \frac{x^2 + 5x + 6}{2x}.$$

Одредити област дефинисаности, нуле и знак функције и испитати њену парност.

2. Дате су функције

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = \frac{x}{|x|}, f_3(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x, f_4(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}, f_5(x) = \log_2 2^x.$$

Које су од ових функција једнаке међусобно, а које различите?

3. Дата је функција $f : [\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow [\frac{3}{4}, +\infty)$, $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$.

(а) Наћи $f(x)$.

(б) Доказати да је f 1-1 и на пресликавање.

(в) Одредити $f^{-1}(x)$, $f^{-1} : [\frac{3}{4}, +\infty) \rightarrow [\frac{1}{2}, +\infty)$.

4. Израчунати следеће граничне вредности:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 8} - x); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}; \quad (в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

5. Одредити константе a и b тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + a, & \text{ако је } x < -1 \\ 2 + x - x^2, & \text{ако је } -1 \leq x \leq 1 \\ b + \log_2 x, & \text{ако је } x > 1 \end{cases}$$

буде непрекидна за све $x \in \mathbf{R}$.

6. Дата је функција $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$. Одредити област дефинисаности, нуле и знак функције и испитати њену парност.

7. Дате су функције $f_1(x) = 2^{\log_2 x}$, $f_2(x) = \log_2 2^x$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = |x|$. Које од ових функција су међусобно једнаке, а које различите?

8. Дата је функције $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(а) Доказати да је 1-1 и на функција.

(б) Одредити $f^{-1} : (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$.

*за први писмени задатак

9. Израчунати следеће граничне вредности:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(x+1)(x+2)} - x \right); \quad (б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x \sin x}; \quad (в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)^{x/2}.$$

10. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sin 2x + a, & x < 0 \\ 1 - x^2 + b, & 0 \leq x < 1 \\ \log x + \frac{1}{2}a, & x \geq 1 \end{cases}$$

Одредити константе a и b тако да функције буде непрекидна за све $x \in \mathbf{R}$.

11. Дата је функција $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+3} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)}$. Одредити област дефинисаности, нуле и знак функције и испитати њену парност.

12. Дате су функције

$$f_1(x) = 10^{\log_{10} x}, \quad f_2(x) = \log_{10} 10^x, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{x}.$$

Које од ових функција су међу собом једнаке, а које различите?

13. Које од следећих функција $f(x) = \frac{5x+3}{2x-5}$, $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $h(x) = \frac{3-x}{2+x}$ су једнаке својој инверзној функцији?

14. Израчунати следеће граничне вредности:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^2} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}; \quad (б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+1) - \cos(x-1)}{x};$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin 2x)^{1/2}.$$

15. Функција $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ није дефинисана за $x = 1$. Одредити $f(1)$ тако да када се функција f додефинише том вредношћу буде непрекидна.

16. Дата је функција $f(x) = \frac{\log_2 |x| + 1}{\log_2 |x| - 1}$. Одредити област дефинисаности, нуле и знак функције и испитати њену парност.

17. Дата је функција $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Наћи $f^{-1}(x)$.

18. Израчунати:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}; \quad (б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}; \quad (в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + x^2 + 2x + 1} \right)^{3x}.$$

19. Наћи асимптоте графика функције $f(x) = x + \frac{3x}{x^2 - 3}$.

20. Одредити константе a и b тако да функција $y = f(x)$ буде непрекидна за све $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & 0 \leq x < 1, \\ b + \cos \frac{\pi x}{2}, & x \geq 1. \end{cases}$$