Дефиниција и основне особине вероватноће

Теорија вероватноће је математичка дисциплина која се бави математичком анализом случајних појава.

Пример: Баца се хомогена коцка чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Случајна појава је број који ће се јавити при том бацању.

Пример: Бацање новчића. Појава грба или писма је случајна појава.

Но те појаве се ипак могу детаљније описати. На пример код великог броја бацања новчића број понављања грба и писма биће приближно једнаки; при бацању коцке велики број пута свака цифра ће се јавити приближно исти број пута ($\frac{1}{6}$ од укупног броја бацања).

Ово нас наводи на закључак да је могуће квантитативно оценити случајност догађаја. Почетак развоја теорије вероватноће везује се за француске математичаре Паскала и Фермаа (1654) и њихову преписку у којој су дали опште методе за одређивање победе играча у хазардним играма.

Простор елементарних догађаја

Дефиниција: Скуп Ω свих могућих исхода неког експеримента назива се простор елементарних догађаја, а елементи скупа Ω зову се елементарни догађаји.

Примери:

* Бацање новчића $\Omega = \{\Pi, \Gamma\}$
* Новчић се баца n пута $\Omega = \big\{w = (c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_k = \Pi \vee c_k = \Gamma,\ k = \overline{1,n}\big\}$
* Бацање коцке 2 пута
$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$$
$$|\Omega| = 36$$
* Бацамо коцку два пута и интересује нас збир бацања
$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$$
* Бацамо коцку док збир регистрованих бројева не постане већи од 2
$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$$
* Простор елементарних догађаја не мора бити коначан, нпр. новчић се баца до прве појаве писма
$$\Omega = \{\Pi, \Gamma\Pi, \Gamma\Gamma\Pi, \Gamma\Gamma\Gamma\Pi, \ldots\} \cup \{w_0\}$$
(w_0 - исход да се писмо не појави, тј. $w_0 = \Gamma\Gamma\Gamma\ldots$)

Догађаји и операције са догађајима

Дефиниција: Нека је Ω простор елементарних догађаја неког експеримента, који садржи коначно много или пребројиво много исхода. Сваки подскуп A скупа Ω зове се догађај. Скуп свих догађаја (партитивни скуп скупа Ω) означавамо са $\mathcal{A}$. Догађај $A \in \mathcal{A}$ се реализује, ако се реализује исход $w \in A$.

Пример: Новчић се баца три пута. Простор елементарних догађаја

$$\Omega = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Gamma\,\Gamma, \Gamma\,\Pi\,\Gamma, \Gamma\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$$

Догађај A: пашће бар два писма $\quad A = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Pi\}$
Догађај B: појавиће се само једна страна $\quad B = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$.

Пример: Коцка се баца два пута. Скуп свих могућих исхода је
$\Omega = \{(1,1), \ldots, (6,6)\},\ |\Omega| = 36.$
Догађај A: пашће бар једна шестица $\quad A = \{16, 26, \ldots, 66, 61, \ldots, 65\}$
Догађај B: збир девет $\quad B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

У теорији вероватноће скуп Ω зове се сигуран догађај.
Празан скуп $\emptyset$ зове се немогућ догађај.
Догађај $\overline{A}$, комплементаран (супротан) догађају A, одређен је са
$\overline{A} = \Omega \backslash A = \{w | \neg w \in A\}$. Догађај $\overline{A}$ се реализује, ако се не реализује догађај A (тј. ако се експеримент завршио исходом w за који важи $\neg w \in A$)

Унија догађаја A и B је догађај $A \cup B$, одређен условом

$$A \cup B = \{w | w \in A \vee w \in B\}$$

(догађај $A \cup B$ се реализује ако се реализује бар један од догађаја A и B)

Пресек догађаја A и B је догађај $A \cap B$, одређен условом

$$A \cap B = \{w | w \in A \wedge w \in B\}$$

(догађај $A \cap B$ се реализује ако се реализује сваки од догађаја A и B)

Догађаји A и B су дисјунктни, ако је $A \cap B = \emptyset$.
(користићемо ознаке $A + B$ за $A \cup B$ и AB за $A \cap B$)

Дефиниција: Колекција догађаја $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ зове се разбијање сигурног догађаја Ω, ако важи:

1° $A_k \neq \emptyset, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

2° $A_k A_j = \emptyset, \quad k \neq j$

3° $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

Пример: Баца се новчић три пута. Одредити: а) скуп свих могућих исхода; б) догађај A пашће бар два писма; в) догађај B пашће једна страна.
$\Omega = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \ldots, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$
$A = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Pi\}$
$B = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$
$\overline{A}$ - пашће највише једно писмо $\quad \overline{A} = \{\Pi\,\Gamma\,\Gamma, \Gamma\,\Pi\,\Gamma, \Gamma\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$
$A \cup B$ - у три бацања биће 0, 2 или 3 писма
$A \cup B = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\Pi\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$,
$\overline{A}B$ описујемо са пашће највише једно писмо и пашће једна страна
$\overline{A}B = \{\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$

Вероватноћа случајног догађаја

Нека је $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ простор елементарних догађаја неког експеримента и $A \subset \Omega$. Сваки исход (елем. догађај) $w_k \in \Omega$ за који важи $w_k \in A$, зове се повољан исход за догађај A.

Дефиниција: Сваком од n могућих исхода $w_1, w_2, \dots, w_n$ придружимо вероватноћу $\dfrac{1}{n}$. Вероватноћа догађаја A једнака је $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где је m број повољних исхода за догађај A. (Вероватноћа догађаја A једнака је количнику броја повољних и броја свих могућих исхода)

Пример: Баца се коцка за игру. Нека је догађај A:
1° да ће пасти број дељив са 3 , $P(A) = \frac{2}{6}$ $A = \{3, 6\}$
2° да ће пасти број већи од 4 , $P(A) = \frac{2}{6}$ $A = \{5, 6\}$

Пример: Коцка за игру баца се два пута. Простор исхода садржи 36 двоцифрених бројева. Сваком исходу придружимо вероватноћу $\dfrac{1}{36}$. Нека су $A_2, A_3, \dots, A_{12}$ догађаји да је збир два бацања редом једнак $2, 3, \dots, 12$.

$A_2 = \{11\}$ $\quad P(A_2) = \dfrac{1}{36}$

$A_3 = \{12, 21\}$ $\quad P(A_3) = \dfrac{2}{36}$

$A_4 = \{13, 22, 31\}$ $\quad P(A_4) = \dfrac{3}{36}$ $\qquad P(A_2) + \ldots + P(A_{12}) = 1$

$\ldots$ $\quad \ldots$

$A_{12} = \{66\}$ $\quad P(A_{12}) = \dfrac{1}{36}$

Дефиниција: Нека је $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ простор елементарних догађаја неког експеримента и $\mathcal{A}$ партитивни скуп скупа Ω. За свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, придружимо елементарном догађају w_k број $p_k = p(w_k)$, тако да важе следећа својства:
1° ненегативност , $p_k \geq 0$; 2° нормираност , $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Број p_k зове се вероватноћа елементарног догађаја w_k. Полазећи од вероватноћа елементарних догађаја, дефинишемо вероватноћу $P(A)$ произвољног догађаја $A \in \mathcal{A}$ као збир вероватноћа елементарних догађаја повољних за догађај A, тј. ако је $A = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$, онда је $P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{j_m}$.
Тиме је дефинисана функција $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ зове се простор вероватноћа експеримента са коначно много исхода.

Својства вероватноће $\quad P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

Теорема:

1° За сваки догађај A важи $0 \leq P(A) \leq 1$

2° Вероватноћа сигурног догађаја је $P(\Omega) = 1$

3° Ако је $AB = \emptyset$, онда је $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4° За сваки догађај A важи једнакост $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5° Вероватноћа немогућег догађаја је $P(\emptyset) = 0$

6° Ако је $A \subset B$, онда је $P(A) \leq P(B)$.

Доказ:

1° Вероватноћа догађаја A дефинише се као збир вероватноћа елементарних догађаја који су повољни за A.

2° Збир вероватноћа свих елементарних догађаја је 1.

3° $A = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$, $B = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ и $AB = \emptyset$.
Тада је $A \cup B = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m \, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, па важи
$P(A) + P(B) = P(\sigma_1) + \ldots + P(\sigma_m) + P(\tau_1) + \ldots + P(\tau_k) = P(A \cup B)$

4° $A\overline{A} = \emptyset$ и $A \cup \overline{A} = \Omega$
$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5° $\Omega = \Omega \cup \emptyset \Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

6° $A \subset B \Rightarrow B = A \cup \overline{A}B \wedge A \cap \overline{A}B = \emptyset$
$P(B) = P(A) + P(\overline{A}B) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Лако је доказати и $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$, ако је $A_iA_j = \emptyset$ (коначна адитивност вероватноће)

Задаци

1. Из шпила од 52 карте, на случајан начин, се извлачи једна карта. Одредити вероватноћу да је извучена карта: (а) краљ; (б) пик; (в) краљ пик; (г) није краљ пик; (д) пик или треф?

   Решење: (а) $P(K) = \frac{1}{13}$; (б) $P(P) = \frac{1}{4}$; (в) $P(K_p) = \frac{1}{52}$;
   (г) $P(\overline{K_p}) = \frac{51}{52}$; (д) $P(T + P) = \frac{1}{2}$.

2. У кутији се налази 5 лоптица црвене боје, 3 плаве и 2 зелене. Из кутије се, на случајан начин, извлачи једна куглица. Која је вероватноћа да извучена куглица: (а) буде црвена (догађај C); (б) буде плава (P); (в) буде зелена (Z); (г) не буде плава; (д) не буде зелена; (ђ) буде црвена или плава (F).

   Решење: $P(C) = 0.5$; $P(P) = 0.3$; $P(Z) = 0.2$; $P(\overline{P}) = 0.1$; $P(\overline{Z}) = 0.8$; $P(F) = 0.8$.

3. Направити листу могућих исхода за истовремено бацање две коцкице. Одредити вероватноћу да: (а) збир на коцкицама буде 8; (б) збир на коцкицама буде највише 5; (в) збир на коцкицама буде најмање 5; (г) обе коцкице показују исти број; (д) прва коцкица показује број мањи од друге; (ђ) су добијени бројеви узајамно прости.

   Решење: (а) $P(A) = \frac{5}{36}$; (б) $P(B) = \frac{5}{18}$; (в) $P(C) = \frac{5}{6}$;
   (г) $P(D) = \frac{1}{6}$; (д) $P(E) = \frac{5}{12}$; (ђ) $P(F) = \frac{23}{36}$.

4. Одредити вероватноћу да се из шпила од 52 карте, на случајан начин, извуку: (а) два кеца у два извлачења, без враћања (догађај A); (б) редом, кец пик и пик у два извлачења, без враћање (B); (в) редом, треф и кец пик у два извлачења, без враћања (C).

   Решење: (а) $P(A) = 0,0045$; (б) $P(B) = 0,00452$; (в) $P(C) = 0,0049$.

5. Лутрија има 100 лозова нумерисаних бројевима од 1 до 100, од којих су добици бројеви који су дељиви и са 4 и са 5. Колика је вероватноћа да се при куповини једног лоза извуче добитак?

Решење: $P = 0,05$.

6. У кутији има a белих и b црних куглица ($a \geq 2$, $b \geq 3$). Одједанпут се извлачи пет куглица. Наћи вероватноћу да су извучене две беле и три црне куглице.

Решење: $P(A) = \dfrac{\binom{a}{2} \cdot \binom{b}{3}}{\binom{a+b}{5}}$.

7. Између четири кандидата и три кандидаткиње бира се одбор од пет чланова. Сви имају подједнаку вероватноћу избора. Одредити вероватноћу да ће већину у одбору чинити кандидаткиње?

Решење: $P = \dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{7}{5}} = 0,285$.

8. Из једне партије од 10 производа, у којима има 7 стандардних, узима се на случајан начин 6 производа. Наћи вероватноћу да међу тих 6 производа буде 4 стандардна.

Решење: $P(A) = \dfrac{\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{1}{2}$.

9. Из шпила од 52 карте на случајан начин се извлачи једна карта. Израчунати вероватноћу следећих догађаја:

(а) $A = \{$„Извучена карта је краљ херц"$\}$;
(б) $B = \{$„Извучена карта је херц"$\}$;
(в) $C = \{$„Извучена карта је кец пик или карта херц"$\}$;
(г) $D = \{$„Извучена карта је пик или херц"$\}$.

Решење: $P(A) = \dfrac{1}{52}$; $P(B) = \dfrac{13}{52}$; $P(C) = \dfrac{7}{26}$; $P(D) = \dfrac{1}{2}$.

10. Новчић се баца 4 пута. Одредити вероватноћу да:

(а) писмо падне више пута него грб; (б) резултат свих бацања буде исти.

Решење: $P(A) = \dfrac{5}{16}$; $P(B) = \dfrac{1}{8}$.

11. У кутији се налази 18 куглица, 3 беле, 7 црвених и 8 безбојних. Одредити вероватноћу да ће се при истовременом извлачењу две куглице добити 1 бела и 1 црвена.

$P(A) = \dfrac{C_1^3 \cdot C_1^7}{C_2^{18}} = \dfrac{3 \cdot 7}{\frac{18 \cdot 17}{2}} = \dfrac{7}{51}$

12. Одредити вероватноћу да ће приликом бацања коцке пасти паран број.
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

13. У посуди се налазе цедуље нумерисане бројевима од 1 до 80. Одредити вероватноћу да је на извученој цедуљи број који није мањи или једнак од 45. Одредити вероватноћу да ћемо извући број дељив са три.
а) $P(A) = \frac{35}{80} = \frac{7}{10}$; б) $P(B) = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}$

14. За усмени део испита треба научити 50 питања. Кандидат је научио 45 питања. Ако се на испиту одговара на 2 питања одредити вероватноћу да ће на цедуљи бити питања која кандидат зна.
$P(A) = \frac{m}{n}$; m је број повољних могућности, а n је број свих могућности
$P(A) = \frac{C_2^{45}}{C_2^{50}} = \frac{45 \cdot 44}{50 \cdot 49} = \frac{198}{245}$

15. Шест стрелаца гађа у 10 мета. Ако сваки стрелац насумице бира мету, која је вероватноћа да ће сви стрелци гађати у различите мете?
$P(A) = \frac{m}{n} \quad m = V_6^{10}$ и $n = \overline{V_6^{10}} \quad P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6}$

16. У кутији је 5 куглица - две беле, две црвене и једна жута. Извлаче се три куглице. Одредити:
(а) број могућих исхода;
(б) број исхода да се извуку три различита
(в) број исхода да се извуку три црвене
Решење: (а) $C_3^5 = 10$; (б) $C_1^2 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1 = 4$; (в) 0

17. Бацамо две коцке. (а) $\Omega = ?$; (б) A - на горњој страни два иста броја; (в) B - на горњој страни број 7.
Решење: (а) $\Omega = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$, $|\Omega| = 36$;
(б) $A = \{(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$;
(в) $B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

18. Бацамо 2 коцке. Нека је догађај A да падне збир 7, а догађај B да падне збир 9 Одредити $P(A) : P(B) = ?$
Решење: $P(A) = \frac{m}{n}$; $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} = 6$;
$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/9} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

19. У једној фабрици у току дана произведено је n производа одређеног типа. Контролор насумице одабира m предмета које подвргава провери. Ако је међу њима бар један неисправан, целокупна партија се подвргава допунској контроли. Која је вероватноћа да дневна производња буде прихваћена ако је тог дана било k неисправних производа?
$$P(A) = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

20. Од a елемената првог типа и b елемената другог типа одабирамо насумице m елемената. Одредити вероватноћу да је од изабраних елемената p елемената првог типа и q елемената другог типа под условом да су све комбинације подједнако вероватне.

    Решење: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, $m = \binom{a}{p} \cdot \binom{b}{q}$, $n = \binom{a+b}{m}$, $p+q = m$.

21. Од 32 карте играч добија 10 карата. Одредити вероватноћу да добије 2 пика, 4 трефа, 3 кароа и 1 срце.

    Решење: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, $m = C_2^8 \cdot C_4^8 \cdot C_3^8 \cdot C_1^8$, $n = \binom{32}{10}$.

22. За произвољне догађаје A и B важи једнакост $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Доказати.

    Решење: $A \cup B = A\overline{B} \cup AB \cup \overline{A}B$; $A = A\overline{B} \cup AB$, $B = \overline{A}B \cup AB$.

$$P(A \cup B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B)$$

$$= P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) + P(AB) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

Де Мереов парадокс: Догађај се састоји у бацању три хомогене коцке. Одредити шта је вероватније: да падне збир 11 или збир 12.

Решење:

$$A: \begin{array}{rcll} 11 & = & 6+3+2 & 6 \\ & = & 6+4+1 & 6 \\ & = & 5+5+1 & 3 \\ & = & 5+4+2 & 6 \\ & = & 5+3+3 & \frac{3!}{2!} = 3 \\ & = & 4+4+3 & \underline{3} \\ & & & 27 \end{array} \qquad B: \begin{array}{rcll} 12 & = & 6+5+1 & 6 \\ & = & 6+4+2 & 6 \\ & = & 6+3+3 & 3 \\ & = & 5+5+2 & 3 \\ & = & 5+3+2 & 6 \\ & = & 4+4+4 & \underline{1} \\ & & & 25 \end{array}$$

$$P(A) = \frac{27}{216},\ P(B) = \frac{25}{216}.$$