Независни и зависни догађаји. Условна вероватноћа

Нека су A и B два догађаја неког експеримента. Ако остваривање једног од њих не утиче на вероватноћу остваривања другог, кажемо да су ти догађаји независни. Обрнуто, ако остваривање једног од њих утиче на вероватноћу остваривања другог, онда кажемо да су таква два догађаја зависна.

Пример: Бацамо 2 коцке. A - прва коцка је показала 2, B - друга коцка да покаже паран број. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, A и B су независни догађаји.

Пример: Имамо 5 сијалица од којих су две неисправне. Бирамо две сијалице, једну па другу. Нека је догађај A да у првом извлачењу изаберемо неисправну сијалицу, а B догађај да у другом извлачењу изаберемо неисправну. Ако рачунамо $P(B)$, без обзира на догађај A, $P(B) = \frac{2}{5}$, но ако претпоставимо да се A остварио, тада је $P(B) = \frac{1}{4}$. Дакле, догађаји A и B су зависни.

Вероватноћа догађаја B, под условом да се остварио догађај A, означава се $P(B|A)$ и назива се условна вероватноћа.

Како се израчунава $P(B|A)$? Сијалице $1, 2, 3, 4, 5$, $1, 2$ исправне. Бирамо две. Има 20 исхода. Повољни исходи за A су $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$ - то је осам повољних исхода. $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Међу повољним за A нађемо повољне за B. То су $(2,1)$, $(1,2)$, тј. 2 повољна, па $P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Дефиниција: Нека је $P(A) > 0$. Условна вероватноћа догађаја B под условом да се остварио догађај A, дефинисана је са $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Задаци:

1. Две коцке су бачене. Колика је вероватноћа да збир добијених бројева буде 7, ако се зна да је бар један од добијених бројева 5?

   Решење: $\Omega = \{(5,1), \ldots, (5,6), (1,5), (2,5), \ldots, (6,5)\}$, $|\Omega| = 11$.
   $A = \{(2,5), (5,2)\}$, $P(A) = \frac{2}{11}$, или $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$.

2. Коцка је бачена и познато је да је резултат паран број. Одредити вероватноћу да тај број буде дељив са 3.

   Решење: $A = \{2, 4, 6\}$,
   $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$.

3. У кутији се налазе 5 белих и 5 црних куглица. Случајно се бирају, и то три одједном. Ако је изабрана бар једна бела куглица, израчунати вероватноћу догађаја да су све изабране куглице беле.
   Решење: $A = \{\text{бар једна бела}\} = C_1^5 \cdot C_2^5 + C_2^5 \cdot C_1^5 + C_3^5$,
   $B = \{\text{три беле}\} = C_3^5$.
   $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{10}{50+50+10} = \dfrac{1}{11}$.

4. Новчић се баца два пута. Одредити вероватноћу да је у оба бацања пало писмо, ако је познато да је бар једном пало писмо.
   Решење: Новчић се баца два пута. Претпоставимо да сваки од елементарних исхода има исту вероватноћу. Нека је $A = \{\Pi\,\Pi, \Pi\,\Gamma\}$ и $B = \{\Pi\,\Pi, \Gamma\,\Pi\}$. Условна вероватноћа догађаја $AB = \{\Pi\,\Pi\}$ да је у оба бацања пало писмо, при услову да је бар једанпут пало писмо, је
   $$P(AB|A \cup B) = \frac{P(AB(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{2}.$$

5. Коцка за игру баца се два пута. Нека је догађај A да је оба пута пао број већи од 3. Одредити условну вероватноћу догађаја B да је збир палих бројева паран, при услову да је оба пута пао број већи од 3.
   Решење: Вероватноћа је $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{5}{9}$.
   $A = \{44, 45, 46, 54, 55, 56, 64, 65, 66\}$.

6. Коцка за игру баца се 3 пута. Израчунати вероватноћу да је три пута пала шестица, ако је познато:
   (а) бар једном је пала шестица; (1/91)
   (б) у трећем бацању је пала шестица; (1/36)
   (в) у сваком бацању пао је паран борј. (1/27)

7. Новчић се баца три пута. Ако је у првом бацању пало писмо колика је вероватноћа да су пала бар два писма?
   Решење: $A = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Pi\,\Gamma\,\Gamma\}$, $B = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Pi\}$,
   $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{3/8}{1/2} = \dfrac{3}{4}$.

8. Новчић се баца три пута. Ако је пало бар једно писмо, колика је вероватноћа да су пала бар два писма?
   Решење: $\Omega = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \ldots, \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$, $|\Omega| = 8$.
   $A = \{\Pi\,\Gamma\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Gamma\,\Pi\,\Pi, \Gamma\,\Gamma\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Pi\}$,
   $B = \{\Pi\,\Pi\,\Pi, \Pi\,\Pi\,\Gamma, \Pi\,\Gamma\,\Pi, \Gamma\,\Pi\,\Pi\}$.
   $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{4/8}{7/8} = \dfrac{4}{7}$.

9. У кутији се налазе три беле и три црне куглице. Из кутије се случајно бирају две куглице, једна по једна без враћања. Израчунати вероватноћу догађаја да су обе изабране куглице беле.
   Решење: A - прва куглица бела, B - друга куглица бела.
   $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$.

10. Студент A и студент B решавају исти задатак свако за себе. Ако је вероватноћа да ће га решити студент A једнака $0,90$, а студент B једнака $0,85$:

(а) наћи вероватноћу да ће задатак бити решен;
(б) ако је зад решен, одредити вероватноћу да га је решио студент A.

Решење: Вероватноћа да је студент A решио задатак је $P(A) = 0.9$, а да је студент B решио задатак је $P(B) = 0.85$. Имамо да је $P(\overline{A}) = 0.1$, $P(\overline{B}) = 0.15$. Вероватноћа да је задатак решен је $P(C)$.
(а) $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$P(C) = 0.9 + 0.85 - 0.9 \cdot 0.85 = 0.985$.
Видимо да је и $P(C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B})$.
(б) $P(A|C) = \dfrac{P(A) \cdot P(C|A)}{P(C)}$, притом $P(C|A) = 1$.
$P(A|C) = 0.914$.

11. Три стрелаца независно један од другог гађају једну мету по једанпут, погађајући је са вероватноћама, редом, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$. Ако је циљ погођен једном, колика је вероватноћа да трећи стрелац промаши?

Решење: Вероватноћа да је први стрелац погодио је $P(A)$, да је други погодио је $P(B)$, да је трећи погодио је $P(C)$, а да је циљ погођен једном је $P(D)$. Имамо да је $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(C) = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Тражи се условна вероватноћа $P(\overline{C}|D) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)}$. Вероватноћа да је трећи стрелац промашио, а да је циљ погођен је

$$P(\overline{C} \cap D) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = \frac{7}{60}.$$

Тражена вероватноћа је $P(\overline{C}|D) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)} = \dfrac{7}{9}$.

12. Формула множења вероватноћа

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n+1}).$$