Формула потпуне вероватноће

Теорема: Нека је $A_1, A_2, \dots, A_n$ разбијање сигурног догађаја Ω и нека за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи $P(A_k) > 0$. Тада за сваки догађај B важи следећа формула $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$ (формула потпуне вероватноће).

Доказ: Користећи коначну адитивност вероватноће и формулу множења вероватноћа $(P(AB) = P(A) \cdot P(B|A))$ добијамо
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|Ai)$.

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$
$$= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

1. На стоваришту се налазе производи исте врсте произведени у три различита погона, и то: 20% из I погона, 40% из II погона, 40% из III погона. Вероватноћа да су производи неисправни су: $0,01$ за I, $0,02$ за II, $0,004$ за III. Одредити вероватноћу да случајно изабран производ на стоваришту буде неисправан.

   B - производ неисправан; A_i производ узет са стоваришта i

   $$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
   $$= 0,2 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,04$$
   $$= 0,002 + 0,008 + 0,016 = 0,026.$$

2. У I кутији су три беле и две црне куглице, а у II, једна бела и четири црне куглице. Извлачимо насумичну куглицу. Одредити вероватноћу да је извучена бела куглица.

   $B-$ бела куглица; A_i- изабрана $i-$та кутија.
   $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

3. У продавници се налазе сијалице произведене у четири различите фабрике и то из $I - 250$, $II - 525$, $III - 275$, $IV - 950$. Вероватноћа да сијалица гори више од 1500 часова је: за $I - 0,15$, $II - 0,3$, $III - 0,2$, $IV - 0,1$. Купљена сијалица је случајно изабрана. Одредити вероватноћу да она гори више од 1500 часова.

   $250 + 525 + 275 + 950 = 2000,$

$P(A_1) = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8}$, $P(A_2) = \frac{525}{2000} = \frac{21}{80}$, $P(A_3) = \frac{275}{2000} = \frac{11}{80}$,
$P(A_4) = \frac{950}{2000} = \frac{19}{40}$

$$
\begin{aligned}
P(B) = P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4) \\
= \frac{1}{8}\cdot 0,15 + \frac{21}{80}\cdot 0,3 + \frac{11}{80}\cdot 0,2 + \frac{19}{40}\cdot 0,1 \\
= \frac{3}{160} + \frac{63}{800} + \frac{22}{800} + \frac{19}{400} = \frac{15+63+22+38}{800} = 0,1725
\end{aligned}
$$

4. У свакој од две кутије налази се по m белих и n црних куглица. Из прве случајно се бира једна куглица и стави у другу кутију, затим се из друге кутије бира куглица. Израчунати вероватноћу да је друга куглица била бела.

   $P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

$$P(A_1) = \frac{m}{m+n},\ P(B|A_1) = \frac{m+1}{m+n+1}$$

$$P(A_2) = \frac{n}{m+n},\ P(B|A_2) = \frac{m}{m+n+1}.$$

5. У првој посуди налази се 20 производа, од којих 15 стандардних. У другој 30 од којих 24 стандардних, а у трећој 10 од којих су 6 стандардни. Одредити вероватноћу, ако насумице бирамо производ и посуду, да он буде стандардан.

   B - изабран стандардни производ

$$
\begin{aligned}
P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3) \\
= \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{20} + \frac{1}{3}\cdot\frac{24}{30} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{43}{60}.
\end{aligned}
$$

6. У кутији се налази једна куглица која може бити бела или црна. У кутију се ставља једна бела куглица, па се из кутије на случајан начин бира једна куглица. Колика је вероватноћа да је у кутији већ била бела куглица, ако је извучена куглица бела?

   B - извучена је бела;
   A_1 - у кутији је била бела; A_2 - у кутији је била црна;
   $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_1) = 1$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_2) = \frac{1}{2}$.
   $P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2)} = \frac{2}{3}$.

7. Две машине производе артикле исте врсте. Вероватноћа да артикал буде прве класе износи $0,92$ за прву, а $0,8$ за другу машину. Прва машина производи три пута више артикала од друге и сви се шаљу у складиште. Одредити вероватноћу да је изабрани артикал прве класе.

   B - изабран је артикал I класе. A_1 - прва машина га је произвела.
   A_2 - друга машина га је произвела.
   $P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(B|A_1) = 0,92$, $P(A_2) = \frac{1}{4}$, $P(B|A_2) = 0,8$.
   $P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2)$.

Бајесова формула:

Теорема: Нека је $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ разбијање сигурног догађаја Ω, при чему за свако $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $P(A_k) > 0$ и нека је B произвољан догађај за који важи $P(B) > 0$. Тада је

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Доказ: Из дефиниције условне вероватноће следи

$$P(A_kB) = P(A_k)P(B|A_k) = P(B)P(A_k|B)$$

Искористимо формулу потпуне вероватноће $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Примери:

1. У првој посуди налази се 8 белих и 6 црних куглица, а у другој 10 белих и 4 црне. Случајно је изабрана куглица и посуда. Извучена куглица је црна. Одредити вероватноћу: (а) да је изабрана прва посуда; (б) да је изабрана друга посуда.

   Решење: I: 8 белих и 6 црних. II: 10 белих и 4 црне
   B - извучена је црна куглица.
   $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{14} = \frac{5}{14}$.
   $P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{3}{5}$, $P(A_2|B) = \frac{2}{5}$.

2. Два аутомата производе исти предмет и лагерују у исти контејнер. Производња првог аутомата два пута је већа од производње другог аутомата. Први аутомат производи просечно 60% предмета одличног квалитета, а други 84% такође одличног квалитета. Одредити вероватноћу да је изабрани предмет произведен у првом аутомату и да је одличног квалитета.

   Решење: $P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{10}{17}$.
   $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(B|A_1) = \frac{3}{5}$; $P(A_2) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_1) = \frac{21}{25}$.

3. Од три једнаке пушке бира се случајно једна: (а) одредити вероватноћу да је циљ погођен ако она за прву пушку износи $0,75$, за другу $0,85$ и трећу $0,05$; (б) ако је циљ погођен, одредити вероватноћу да је погођен првом, другом, односно трећом пушком.

   Решење: (а) $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$
   $P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,85 + \frac{1}{3} \cdot 0,05 = 0,55$.

(б) $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0,75}{0,55}=\dfrac{5}{11}$;

$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0,85}{0,55}=\dfrac{17}{33}$; $\quad P(A_3|B)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0,05}{0,55}=\dfrac{1}{33}$.

4. Имамо две посуде. У првој посуди се налазе 2 беле и 1 црна куглица, а у другој посуди 1 бела и 5 црних куглица. Преместимо једну куглицу из прве посуде у другу. Затим извуцимо једну куглицу из друге посуде. Ако је она бела, одредити вероватноћу да је премештена куглица била црна.

   Решење: B - извукли смо белу. A_1 - пребацили смо белу куглицу из I у II кутију. A_2 - пребацили смо црну куглицу из I у II кутију.
   $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\dfrac{1}{5}$
   I: 2б, 1ц - $P(A_1)=\dfrac{2}{3}$, $P(B|A_1)=\dfrac{2}{7}$;
   II: 1б, 5 - $P(A_2)=\dfrac{1}{3}$, $P(B|A_2)=\dfrac{1}{7}$.

Задаци:

1. У једној кутији налази се 20 лампи за радио апарате, од којих је 18 стандардних, а у другој кутији налази се 10 радио лампи од којих је 9 стандардних. Из друге кутије насумице се бира радио-лампа и пребацује у прву кутију. Одредити вероватноћу да је насумице извучена радио-лампа, из прве кутије, стандардна.

   Решење: B - извучена је стандардна;
   A_1 - пребачена је стандардна из II у I;
   A_2 - пребачена је нестандардна из II у I.
   $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{19}{21}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{18}{21}=0,9$
   I - 2 нестандардних, 18 стандардних.
   II - 1 нестандардна, 9 стандардних.
   $P(A_1)=\dfrac{9}{10}$, $P(B|A_1)=\dfrac{19}{21}$. $\qquad P(A_2)=\dfrac{1}{10}$, $P(B|A_2)=\dfrac{18}{21}$.

2. Из кутије у којој је било 6 петодинарки и 4 дводинарке изгубљен је један новчић. Да би се одредила његова вредност, из кутије се истовремено извлаче два новчића. Колика је вероватноћа да је изгубљена петодинарка, ако су оба извучена новчића петодинарке? А ако се зна да су оба извучена новчића исте вредности?

   Решење:
   A_1 - изгубљена је петодинарка; A_2 - изгубљена је дводинарка;
   B - оба извучена новчића су петодинарке;
   C - оба извучена новчића су исте вредности.
   $P(A_1)=\dfrac{6}{10}$, $P(A_2)=\dfrac{4}{10}$.
   $P(B|A_1)=\dfrac{C_2^5}{C_2^9}=\dfrac{5}{18}$, $\quad P(B|A_2)=\dfrac{C_2^6}{C_2^9}=\dfrac{5}{12}$.
   $P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)=\dfrac{1}{3}$.
   $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$.

$P(C|A_1) = \dfrac{C_2^5 + C_2^4}{C_2^9} = \dfrac{4}{9}, \quad P(C|A_2) = \dfrac{C_2^6 + C_2^3}{C_2^9} = \dfrac{1}{2}.$
$P(C) = P(A_1) \cdot P(C|A_1) + P(A_2) \cdot P(C|A_2) = \dfrac{7}{15}\,.$
$P(A_1|C) = \dfrac{P(A_1) \cdot P(C|A_1)}{P(C)} = \dfrac{4}{7}\,.$

3. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Из кутије се 4 пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије, ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

   Решење: A_0 - нема белих. A_1 - у кутији је једна бела куглица.
   A_2 - у кутији су две беле. A_3 - у кутији су три беле.
   B - извучена је црна и 3 беле.
   $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{4}$
   $P(B|A_0) = 0,\ P(B|A_1) = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{81}$
   $P(B|A_2) = 4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{32}{81}, \quad P(B|A_3) = 0$
   $P(B) = P(A_0) \cdot P(B|A_0) + P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) +$
   $\qquad P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \dfrac{10}{81}$
   $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$
   $P(A_0|B) = P(A_3|B) = 0\,,\ P(A_1|B) = \dfrac{1}{5}\,,\ P(A_2|B) = \dfrac{4}{5}.$
   Највероватнији састав су две беле и једна црна.

4. Међу туристима у једном туристичком центру 65% су мушкарци. Поред тога, 75% жена и 60% мушкараца су домаћи туристи. Израчунати вероватноћу да ће случајно изабрана особа бити:

   (а) држављанин наше земље; (б) страна туристкиња;
   (в) ако је случајно изабран мушкарац, одредити вероватноћу да је он странац.

   Решење: Нека догађај A представља да је особа женског пола, а догађај B да је особа странац. Позната је вероватноћа $P(\overline{A}) = 0.65$, те је $P(A) = 0.35$. Такође је познато $P(\overline{B}|A) = 0.75$ и $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.6$.
   (а) $P(\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}|A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.6525;$
   (б) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot (1 - P(\overline{B}|A)) = 0.0875;$
   (в) $P(B|\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - 0.6 = 0.4.$

5. У једној кутији се налази 5 белих и 7 црвених куглица, а у другој 3 беле и 4 црвене куглице. На случајан начин се из прве у другу кутију пребацују 3 куглице. Затим се из друге кутије извлачи једна куглица.

   (а) Одредити вероватноћу да је извучена куглица беле боје;
   (б) Ако је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да су из прве у другу кутију пребачене једна бела и две црвене куглице.

   Решење: (а) Посматрамо догађај A, да је из друге кутије извучена куглица беле боје, и догађај B_i, да су од 3 куглице које су пребачене из прве у другу кутију i куглице беле боје ($i = 0, 1, 2, 3$). Тражена вероватноћа је:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(B_i) \cdot P(A|B_i),$$

где је $P(B_i) = \dfrac{\binom{5}{i} \cdot \binom{7}{3-i}}{\binom{12}{3}}$, $P(A|B_i) = \dfrac{3+i}{10}$.

$$P(A) = 0.4728.$$

6. Три, на први поглед, исте кутије имају следеће садржаје: $I - 5$ белих и 5 црвених, $II - 4$ беле и 8 црвених, $III - 9$ белих и 3 црвене куглице.

   (а) Шта је вероватноије - да ће из друге кутије бити извучена бела кулица, или да ће бела куглица бити извучена из случајно изабране кутије?
   (б) Ако је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да је она из друге кутије.

   Решење: Дефинишимо догађај A, да је извучена бела куглица, и догађај B_i, да је изабрана $i-$та кутија $(i = 1, 2, 3)$.
   Познате су вероватноће:

$$P(B_i) = \frac{1}{3}, \;\; P(A|B_1) = \frac{1}{2}, \;\; P(A|B_2) = \frac{1}{3}, \;\; P(A|B_3) = \frac{3}{4}.$$

   (а) Преко формуле тоталне вероватноће имамо да је:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.5278.$$

   Следи да је вероватније да ће бела куглица бит извучена из случајно одабране кутије.

   (б) Тражена вероватноћа је:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = 0.2105.$$

7. На територији неке општине, у популацији радно способних житеља, налази се 50% са нижим, 42% са средњим и 8% са вишим и високим образовањем 3%. За остале се зна да је 10% незапослених. Ако се на случајан начин бира један радно способан житељ општине и констатује се да је он запослен, колика је вероватноћа да је он из категорије: (а) ниже образованих; (б) средње образованих.

   Решење: Дефинишимо догађаје:
   A - Изабрани радно способни житељ општине је запослен;
   B_1 - Житељ општине је са нижим образовањем;
   B_2 - Житељ општине је са средњим образовањем;
   B_3 - Житељ општине је са вишим или високим образовањем.
   Познате су вероватноће:

$$P(B_1) = 0.50, \;\; P(B_2) = 0.42, \;\; P(B_3) = 0.08;$$

$$P(\overline{A}|B_1) = 0.10, \quad P(\overline{A}|B_2) = 0.06, \quad P(\overline{A}|B_3) = 0.03.$$

Вероватноћа $P(A)$, да ће случајно изабрани радно способни житељ општине бити запослен, потребна за рачунање тражених условних вероватноћа, може се одредити помоћу вероватноће супротног догађаја $\overline{A}$. $P(\overline{A})$ се рачуна применом формуле тоталне вероватноће:

$$P(\overline{A}) = P(B_1) \cdot P(\overline{A}|B_1) + P(B_2) \cdot P(\overline{A}|B_2) + P(B_3) \cdot P(\overline{A}|B_3) = 0.0776.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.9224.$$

(а) Тражена вероватноћа је:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot (1 - P(\overline{A}|B_1))}{P(A)} = 0.488.$$

(б) Тражена вероватноћа је:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \cdot (1 - P(\overline{A}|B_2))}{P(A)} = 0.428.$$

8. Осигурач у електричном колу отказује при: кратком споју у електронској лампи (догађај A) са вероватноћом $0,5$, споју у намотајима трансформатора (B) са вероватноћом $0,6$, пробоју кондензатора (C) са вероватноћом $0,7$, другим разлозима (D) са вероватноћом $0,9$. Вероватноће догађаја A, B, C и D су, редом, 0.35, 0.30, 0.25 и 0.10. Ако је осигурач прегорео, наћи највероватнији разлог.

   Решење: Уз дефинисане догађаје, дефинишимо и догађај E - осигурач је отказао. Познате су вероватноће:

$$\begin{array}{llll} P(E|A) = 0.5, & P(A) = 0.35, & P(E|B) = 0.6, & P(B) = 0.3, \\ P(E|C) = 0.7, & P(C) = 0.25, & P(E|D) = 0.9, & P(D) = 0.1. \end{array}$$

   $P(E)$ се одређује преко формуле тоталне вероватноће, па је

$$P(E) = 0.62.$$

   Највероватнији разлог отказа осигурача одређује се поређењем условних вероватноћа:

$$P(A|E) = \frac{P(A)\,P(E|A)}{P(E)} = 0.2882, \quad P(B|E) = \frac{P(B)\,P(E|A)}{P(E)} = 0.2903,$$
$$P(C|E) = \frac{P(C)\,P(E|C)}{P(E)} = 0.2822, \quad P(D|E) = \frac{P(D)\,P(E|C)}{P(E)} = 0.1452.$$

   Највероватније је до отказа осигурача дошло због кратког споја у намотајима трансформатора (догађај B).

9. Професор математике зна из претходног искуства да студент који стално ради домаће задатке са вероватноћом 0.95 полаже испит, док за студента који не ради домаће задатке та вероватноћа износи 0.30. Познато је и да 25% студената ради домаће задатке.

   (а) Наћи вероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.

(б) Ако случајно изабрани студент из групе положи испит, која је вероватноћа да је он стално радио домаће задатке?

Решење: Могу се дефинисати следећи догађаји: A - студент полаже испит, B - студент ради домаће задатке. Познате су вероватноће:

$$P(B) = 0.25,\ P(A|B) = 0.95,\ P(A|\overline{B}) = 0.3.$$

(а) Тражена вероватноћа је:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}) = 0.4625.$$

(б) Тражена вероватноћа је:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = 0.5135.$$